DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.05.002

混合算子的不动点定理在减算子问题中的应用*

刘 波 李承耕
(韩山师范学院数学与统计学院,广东 潮州 521041)

摘 要

讨论了一类新的混合单调算子的耦合不动点定理,扩展了原有的结果. 同时证明了减算子的不动点定理.

关键词: 正规锥, 混合单调算子, 不动点.
中图分类号: O177.91

1 预备知识

设 E 是一个实 Banach 空间,如果 P 是 E 中的非空凸闭集,且满足以下条件:

(1) $\forall x \in P, \lambda \geqslant 0 \Rightarrow \lambda x \in P$;

(2) $\forall x \in P, -x \in P \Rightarrow x = \theta$,$\theta$ 是 P 中零元;

则称 P 为 E 中的一个锥.

设半序"$\leqslant$"是 E 中的锥 P 产生的,即 $\forall x, y \in E$,若 $y - x \in P$,则 $x \leqslant y$. 如果 $x \leqslant y$,且 $x \neq y$,则记 $x < y$.

定义 1 [3] 设 P 是 E 中一个锥,如果存在常数 $N > 0$,使得

$$\theta \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \| x \| \leqslant N \| y \|,$$

则称 P 是正规锥,满足上式的正数 N 中最小者叫做 P 的正规常数. 显然,正规常数 $N \geqslant 1$.

定义 2 [3] 设 $D \subset E$,算子 $A: D \times D \to E$,

(1) 如果 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in D$,$x_1 \leqslant x_2, y_1 \geqslant y_2$ 蕴含着 $A(x_1, y_1) \leqslant A(x_2, y_2)$,则称 A 是混合单调算子;如果 A 与第一变元无关,则称 A 是减算子;

(2) 如果 $(x^*, y^*) \in D \times D$ 满足 $x^* = A(x^*, y^*)$,$y^* = A(y^*, x^*)$,则称 (x^*, y^*) 是 A 的耦合不动点;

(3) 如果 $\bar{x} \in D$ 满足 $\bar{x} = A(\bar{x}, \bar{x})$,则称 $\bar{x}$ 是 A 的一个不动点.

2 主要结果

定理 1 设 E 为完备的锥度量空间,$A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \to E$ 是混合单调算子,且满足下列条件:

(i) 存在 $\beta \in (0, 1)$,使得 $A(v, u) - A(u, v) \leqslant 2\beta(v - u)$,$u_0 \leqslant u \leqslant v \leqslant v_0$;

(ii) $u_0 + \alpha(v_0 - u_0) \leqslant A(u_0, v_0)$,$A(v_0, u_0) \leqslant v_0 - \alpha(v_0 - u_0)$,其中 $\alpha \in [0, 1]$,且 $\alpha + \beta < \frac{1}{2}$,则算子 A 在 $[u_0, v_0] \times [u_0, v_0]$ 中有唯一的不动点 u^*,即 $A(u^*, u^*) = u^*$. 而且有迭代序列

$$\begin{cases} u_{n+1} = A(u_n, v_n) - \alpha(v_n - u_n) \\ v_{n+1} = A(v_n, u_n) + \alpha(v_n - u_n) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$,有 $u_n \to u^*$,$v_n \to u^*$ $(n \to \infty)$,并且有误差估计

$$\| u^* - u_n \| \leqslant N (2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|,$$

和

$$\| u^* - v_n \| \leqslant N (2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|,$$

其中 N 为 P 的正规常数.

证明: 构造迭代序列

$$\begin{cases} u_{n+1} = A(u_n, v_n) - \alpha(v_n - u_n) \\ v_{n+1} = A(v_n, u_n) + \alpha(v_n - u_n) \end{cases},$$

其中 $n = 0, 1, 2, \cdots\cdots$ 由数学归纳法,当 $n = 1$ 时,由条件(ii)有

$$u_1 - u_0 = A(u_0, v_0) - \alpha(v_0 - u_0) - u_0 \geqslant u_0 + \alpha(v_0 - u_0) - \alpha(v_0 - u_0) - u_0 = 0, \quad (2)$$

$$v_0 - v_1 = v_0 - [A(v_0, u_0) + \alpha(v_0 - u_0)] \geqslant v_0 - (v_0 - \alpha(v_0 - u_0)) - \alpha(v_0 - u_0) = 0. \quad (3)$$

收稿日期: 2015-11-01
* 国家自然科学基金资助项目(10961003).

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由 A 为混合单调算子,可得

$$A(v_0,u_0) \geqslant A(u_0,v_0). \tag{4}$$

由式(4) 可得

$$\begin{aligned} v_1 - u_1 &= [A(v_0,u_0) + \alpha(v_0 - u_0)] - [A(u_0,v_0) - \alpha(v_0 - u_0)] \\ &= [A(v_0,u_0) - A(u_0,v_0)] + 2\alpha(v_0 - u_0) \\ &\geqslant 2\alpha(v_0 - u_0) \geqslant 0 \end{aligned}$$

即, $u_0 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0$.

假设 $n = k$ 时下列结论成立,

$$u_{k-1} \leqslant u_k \leqslant v_k \leqslant v_{k-1}.$$

当 $n = k+1$ 时,由 A 为混合单调算子可得

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= [A(u_k,v_k) - \alpha(v_k - u_k)] - [A(u_{k-1},v_{k-1}) - \alpha(v_{k-1} - u_{k-1})] \\ &= [A(u_k,v_k) - A(u_{k-1},v_{k-1})] + \alpha(v_{k-1} - v_k) + \alpha(u_k - u_{k-1}) \geqslant 0, \\ v_k - v_{k+1} &= [A(v_k,u_{k-1}) + \alpha(v_{k-1} - u_{k-1})] - [A(v_k,u_k) + \alpha(v_k - u_k)] \\ &= [A(v_{k-1},u_{k-1}) - A(v_k,u_k)] + \alpha(u_k - u_{k-1}) + \alpha(v_{k-1} - v_k) \geqslant 0, \\ v_k - u_{k+1} &= [A(v_k,u_k) + \alpha(v_k - u_k)] - [A(u_k,v_k) - \alpha(v_k - u_k)] \\ &= [A(v_k,u_k) - A(u_k,v_k)] + 2\alpha(v_k - u_k) \geqslant 0, \end{aligned}$$

即可得

$$u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant v_{k+1} \leqslant v_k.$$

由归纳法得

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_2 \leqslant v_1 \leqslant v_0.$$

下证 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 均是 Cauchy 列. 由条件(i) 有

$$\begin{aligned} \theta \leqslant v_n - u_n &= [A(v_{n-1},u_{n-1}) + \alpha(v_{n-1} - u_{n-1})] - [A(u_n,v_n) - \alpha(v_{n-1} - u_{n-1})] \\ &= (A(v_{n-1},u_{n-1}) - A(u_{n-1},v_{n-1})) + 2\alpha(v_{n-1} - u_{n-1}) \\ &\leqslant 2\beta(v_{n-1} - u_{n-1}) + 2\alpha(v_{n-1} - u_{n-1}) \\ &\leqslant (2\beta + 2\alpha)(v_{n-1} - u_{n-1}) \\ &\leqslant (2\beta + 2\alpha)^2(v_{n-2} - u_{n-2}) \\ &\cdots\cdots \\ &\leqslant (2\beta + 2\alpha)^n(v_0 - u_0), \end{aligned}$$

于是,对于任意的自然数 m,n 有,

$$\theta \leqslant u_{n+m} - u_n \leqslant v_n - u_n \leqslant (2\alpha + 2\beta)^n(v_0 - u_0),$$

$$\theta \leqslant v_n - v_{n+m} \leqslant v_n - u_n \leqslant (2\alpha + 2\beta)^n(v_0 - u_0).$$

于是,由 P 的正规性,有

$$\| v_n - u_n \| \leqslant N_1 (2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|;$$

$$\| u_{n+m} - u_n \| \leqslant N_1 (2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|;$$

$$\| v_n - v_{n+m} \| \leqslant N_1 (2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|;$$

其中 N_1 为 P 的正规常数.

于是 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 为 E 中的 Cauchy 列. 由 E 的完备性,存在 $\bar{u},\bar{v} \in E$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \bar{u}$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \bar{v}$,且 $u_n \leqslant \bar{u} \leqslant \bar{v} \leqslant v_n$. 由

$$v_n - u_n = (v_n - \bar{v}) + (\bar{v} - \bar{u}) + (\bar{u} - u_n) \geqslant \bar{v} - \bar{u},$$

得到 $\bar{v} - \bar{u} \leqslant v_n - u_n$.

由 P 的正规性,有

$$\| \bar{v} - \bar{u} \| \leqslant N_2 \| v_n - u_n \| \leqslant N_1 N_2 (2\alpha + 2\beta)^n \cdot \| v_0 - u_0 \| \to 0, (n \to \infty),$$

其中 N_1, N_2 为 P 的正规常数. 故 $\bar{v} = \bar{u}$,记 $\bar{v} = \bar{u} = u^*$,则有 $u_n \leqslant u^* \leqslant v_n$.

下证 u^* 为 A 在 $[u_0,v_0] \times [u_0,v_0]$ 中的不动点.

由 A 为混合单调算子和迭代序列式(1),得到

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+1} + \alpha(v_n - u_n) = A(u_n,v_n) \leqslant A(u^*,u^*),$$

$$A(u^*,u^*) \leqslant A(v_n,u_n) \leqslant A(v_n,u_n) + \alpha(v_n - u_n) = v_{n+1} \leqslant v_n,$$

即 $u_n \leqslant A(u^*,u^*) \leqslant v_n$.

由 P 的正规性,有

$$\| A(u^*,u^*) - u_n \| \leqslant N_3 \| v_n - u_n \| \leqslant N_1 N_3 (2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|,$$

其中 N_3 为 P 的正规常数. 由上式得到

$$\lim_{n\to\infty} \| A(u^*,u^*) - u_n \| \leqslant \lim_{n\to\infty} N_1 N_3 (2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \| = 0,$$

即 $A(u^*,u^*) = u^*$.

下证不动点的唯一性.

设 v^* 是 A 在 $[u_0,v_0]$ 的另一个不动点. 由迭代序列式(1) 和 A 为混合单调算子,有

$$u_n \leqslant v^* \leqslant v_n.$$

由上式和 P 的正规性,有

$$\| u^* - v^* \| \leqslant N_4 \| v_n - u_n \| \to 0, (n \to \infty),$$

其中 N_4 为 P 的正规常数,故 $u^* = v^*$. 唯一性得证.

由 $\| u_{n+m} - u_n \| \leqslant N (2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|$,令 $m \to \infty$,得到误差估计为

$$\| u^* - u_n \| \leqslant N (2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|.$$

类似有

$$\| u^* - v_n \| \leqslant N (2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|.$$

将减算子看成一种特殊的混合单调算子,于是有以下推论.

定理 2　设 E 为完备的锥度量空间, A: $[u_0,v_0]$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\to E$, A 为减算子,且满足下列条件:

(i) 存在 $\beta \in (0,1)$,使得 $Au - Av \leqslant 2\beta(v-u)$, $\forall u, v \in [u_0, v_0]$;

(ii) $u_0 + \alpha(v_0 - u_0) \leqslant Av_0, Au_0 \leqslant v_0 - \alpha(v_0 - u_0)$,其中 $\alpha \in [0,1]$,且 $\alpha + \beta < \frac{1}{2}$,则算子 A 在 $[u_0, v_0]$ 中有唯一的不动点 x^*. 有误差估计

$$\| u^* - u_n \| \leqslant N(2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|,$$

其中 N 为 P 的正规常数.

证明: 构造序列

$$\begin{cases} u_{n+1} = Av_n - \alpha(v_n - u_n) \\ v_{n+1} = Au_n + \alpha(v_n - u_n) \end{cases}. \tag{5}$$

类似定理 1 的证明,由归纳法知

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0.$$

由条件(i)有

$$\begin{aligned} \theta \leqslant v_n - u_n &= (Au_{n-1} + \alpha(v_{n-1} - u_{n-1})) - \\ &\quad (Av_{n-1} - \alpha(v_{n-1} - u_{n-1})) \\ &= (Au_{n-1} - Av_{n-1}) + 2\alpha(v_{n-1} - u_{n-1}) \\ &\leqslant 2\beta(v_{n-1} - u_{n-1}) + 2\alpha(v_{n-1} - u_{n-1}) \\ &= (2\alpha + 2\beta)(v_{n-1} - u_{n-1}) \\ &\leqslant (2\alpha + 2\beta)^2(v_{n-2} - u_{n-2}) \leqslant \cdots \leqslant \\ &\quad (2\alpha + 2\beta)^n(v_0 - u_0). \end{aligned}$$

于是对于任意的自然数 n, m,有

$$\theta \leqslant u_{n+m} - u_n \leqslant v_n - u_n \leqslant (2\alpha + 2\beta)^n(v_0 - u_0),$$

$$\theta \leqslant v_n - v_{n+m} \leqslant v_n - u_n \leqslant (2\alpha + 2\beta)^n(v_0 - u_0).$$

由 P 的正规性有

$$\| v_n - u_n \| \leqslant N(2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|,$$

$$\| u_{n+m} - u_n \| \leqslant N(2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|,$$

$$\| v_n - v_{n+m} \| \leqslant N(2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|,$$

其中 N 为 P 的正规常数.

于是 $\{u_n\}, \{v_n\}$ 为 E 中的 Cauchy 列. 由 E 的完备性,所以存在 $\bar{u}, \bar{v} \in E$,使得

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \bar{u}, \lim_{n\to\infty} v_n = \bar{v},$$

且 $u_n \leqslant \bar{u} \leqslant \bar{v} \leqslant v_n$,则有

$$\bar{v} - \bar{u} \leqslant v_n - u_n.$$

由 P 的正规性,得到

$$\| \bar{v} - \bar{u} \| \leqslant N \| v_n - u_n \| \to 0, (n \to \infty),$$

即 $\bar{v} = \bar{u}$. 记 $\bar{v} = \bar{u} = u^*$,则 $u_n \leqslant u^* \leqslant v_n$.

现证 u^* 为 A 在 $[u_0, v_0]$ 中的不动点. 由 A 为减算子及迭代序列(5),有

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+1} + \alpha(v_n - u_n) = Av_n \leqslant Au_n \leqslant Au_n + \alpha(v_n - u_n) = v_{n+1} \leqslant v_n,$$

即 $u_n \leqslant Av_n \leqslant Au_n \leqslant v_n$.

由 $Au_n - u_n \leqslant v_n - u_n$ 及 P 的正规性,有

$$\| Au_n - u_n \| \leqslant N \| v_n - u_n \| \to 0, (n \to \infty).$$

又由于 $u_n \to u^* (n \to \infty)$,有

$$\| Au^* - u^* \| = 0,$$

故 $Au^* = u^*$, u^* 为 A 在 $[u_0, v_0]$ 中的不动点.

设 v^* 也是迭代序列产生的另一个不动点,则有 $u_n \leqslant v^* \leqslant v_n$. 又由于 $u_n \leqslant u^* \leqslant v_n$ 及 P 的正规性,有

$$\| u^* - v^* \| \leqslant N \| v_n - u_n \| \to 0, (n \to \infty),$$

其中 N 为 P 的正规常数,故 $u^* = v^*$. 不动点的唯一性得证.

由 $\| u_{n+m} - u_n \| \leqslant N(2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|$,令 $m \to +\infty$,得误差估计为

$$\| u^* - u_n \| \leqslant N(2\alpha + 2\beta)^n \| v_0 - u_0 \|.$$

参 考 文 献

[1] Guo Dajun, Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cone [M]. New York: Academic Press, 1988.

[2] Guo Dajun, Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with application [J]. Nonlinear Analysis, T M A, 1987, 11(5): 623 – 637.

[3] 孙经先. 非线性泛函分析及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[4] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南: 山东科技出版社, 1985.

[5] 郭大钧. 非线性分析中的半序方法 [M]. 济南: 山东科技出版社, 2000: 18 – 141.

[6] 李国祯, 朱传喜. 关于混合单调算子的藕合不动点定理 [J]. 工程数学学报, 1993, 10(1): 9 – 16.

[7] 许绍元. 混合单调算子不动点存在唯一性定理及其应用 [J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2011, 32(1): 11 – 13.

[8] 盛梅波. 一类减算子新的不动点定理及其应用 [J]. 南昌大学学报(理科版), 2005, 29(1): 35 – 37.

[9] 揭成斌, 朱传喜. Menger PN-空间中两类混合单调算子新的公共不动点定理 [J]. 应用泛函分析学报, 2011, 13(1): 100 – 107.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Application of the Fixed Point Theorems of Mixed Monotone Operator in Decreasing Operator

Liu Bo　Li Chenggeng

(School of Mathematics and Statistics, Hanshan Normal University, Chaozhou Guangdong　521041)

Abstract

This paper obtains new coupled fixed point theorems of mixed monotone operator, which extends some previous results. Furthermore, this paper proves the fixed point theorem of decreasing operator.

Key words: normal cone, mixed monotone operator, fixed point.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net