DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.04.001

倍周期半随机序列的猜想与性质

陈奕延[1] 李 晔[2]

(1. 中国人民大学统计学院,北京 100872; 2. 首都师范大学数学与科学学院,北京 100048)

摘 要

通过结合数学、概率论数理统计的相关知识内容,本文创造了一种新的序列,该序列中的一部分项是随机的且出现的概率服从相同或不同的分布,这部分项亦存在周期性,不同于传统的周期性,而是项数存在倍乘关系的项之间相等. 同时,在项数存在倍乘关系的项中,只要知道了首项和周期便可以得到其余项. 所以,首项虽然具备随机性,其余的与之存在项数倍乘关系的项却不是随机的,故而整个序列中随机项与非随机项并存,故称该序列为"倍周期半随机序列". 本文简单介绍了倍周期半随机序列的定义及相关性质,并用R语言绘制了相应的图例.

关键词: 倍周期,半随机性,R语言.

中图分类号: O178

1 引 言

在数学上,人们对于周期函数有充分的认识,对于周期函数有如下的定义式: $f(x) = f(x+T) = \cdots = f(x+k\cdot T)$, $k \in \mathbf{Z}$ 且 $k \neq 0$,其中 $T > 0$ 为函数 $f(x)$ 的最小正周期. 我们可以据此定义一个有限序列 $X_k, k = 1,2,3,\cdots n$,若存在 $X_k = X_{k+t} = \cdots = X_{k+m\cdot t}$,其中 $m \in \mathbf{Z}^+, k = 1,2,3,\cdots, nk + m\cdot t \in \mathbf{Z}^+$ 且 $k + m\cdot t \leqslant n$,则称 $t > 0$ 为序列 X_k 的最小正周期,且相应的各值为序列 X_k 的周期值. 也就是说,隔几项就会有一个相同数值的周期项在序列中出现,各项的序号可以组成一个等差序列,等差项为 t,这种周期是通过相加从而累进的,那么则可以设想,是否存在一个序列,其序号可以组成一个等比序列,并且呈现周期性.

2 猜想定义

如果有一个序列,其某一项为 X_k,那么第 $X_{c\cdot k}$ 项,第 $X_{c^2\cdot k}$ 项,乃至第 $X_{c^m\cdot k}$ 项,存在关系 $X_k = X_{c\cdot k} = \cdots = X_{c^m\cdot k}$,其中 $m \in \mathbf{N}, k = 1,2,3,\cdots,n$. 这样可以发现,各项序号可以组成一个等比数列,公比为 c,若 $c > 0$,称 c 为序列 X_k 的最小正倍周期,简称最小倍周期,则称序列 $X_k, k = 1,2,3,\cdots,n$ 是一个倍周期序列,m 称为周期值 X_k 循环的次数,简称"次". 在现实生活对一组数据进行跟踪观测,若这组数据在每一时刻(观察时刻)或者每一项都是一个随机变量,则称之为随机序列. 譬如设 $X_i \sim \Delta_i$,Δ_i 为某种分布,X_i 为服从该分布的随机变量,则序列 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n, n \in \mathbf{Z}^+$ 称之为随机序列. 若设序列共有 t 项,其中存在倍周期循环项,设根据倍周期循环的初始随机项一共有 l 项,$l < t$,则根据这 l 项又可以循环出很多项,这些项的序号是单调递增的,假设对于某周期项的初始项 X_k,其最小正倍周期为 c_k,循环次为 m_k,则我们可以得到 $X_k = X_{k\cdot c_k{}^{m_k}}$. 由于是随机项,故只要 X_k 一经确定,后面的周期项就不能称为随机项了,只能是固定的常值. 譬如,若 $X_k = a$,则 $X_{k\cdot c_k{}^{m_k}} = a, k\cdot c_k{}^{m_k} > k$,只不过这里为了方便表示,在考虑随机性的同时,还要考虑序列本身的表达方式,所以对于由初始项产生的周期项,依然可用 X_k 的形式表示,只不过这里的 X_k 已经不是随机项,只是一个确定的常值. 对于这些周期性随机项,可以用如下方法表示,设 $X_k = (0.\alpha\beta\cdots\gamma)\times 10^{\theta}$,其中 α,β,γ 均为小数的位数,且 $\alpha,\beta,\gamma \neq 0, \alpha,\beta,\gamma \in \{1,2,3,\cdots,9\}$,那么假设最小正倍周期为 c_k,次为 m_k,则可以得到如下公式:

$$X_{k\cdot c_k{}^{m_k}} = \{0.\alpha\beta\cdots\gamma\ [k\cdot(c_k)]\cdot(c_k - c_k)]\ [k\cdot$$

收稿日期: 2015-09-14

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$c_k^2)\cdot(c_k^2-c_k^2)]\cdots[k\cdot c_k^{m_k})\cdot(c_k^{m_k}-c_k^{m_k})]\}\times 10^{\theta}$,其中 $\theta\in\mathbf{N}$,$c_k>0$,$m_k>0$ 且 $m_k\in\mathbf{N}$.

譬如令 $X_k=90=0.9\times 10^2$,若 $k=2$,$c_k=3$,$m_k=2$,$X_2=0.9\times 10^2$,$X_{2\times 3}=X_6=0.9[(2\times 3)\cdot(3-3)]\times 10^2=0.90\times 10^2$,$X_{2\times 3^2}=X_{18}=0.90[(2\times 3^2)\cdot(3^2-3^2)]\times 10^2=0.900\times 10^2$,$X_2=X_6=X_{18}$,这里 X_2 是随机项,也是周期项的初始项,但是 X_6 与 X_{18} 却是常值,它们因为具有周期性,所以取值由初始项 X_2 决定,一但 X_2 确定,则 X_6 与 X_{18} 也会马上确定.

所以对于存在周期项的随机序列而言,其并不是完全随机的,可称其为“半随机序列”. 那么,对于倍周期半随机序列,则可以有如下定义: 假设序列 X_i,$i=1,2,3,\cdots,t$,其中周期项的初始项为 X_k,$k\subset i$,$k=1,2,3,\cdots,l$,若初始项为随机项,且具备周期性,最小正倍周期为 $c_k>0$,循环次为 $m_k\in\mathbf{N}$,则相应的周期项为 $X_{k\cdot c_k{}^{m_k}}$,且 $X_k=X_{k\cdot c_k{}^{m_k}}$,$k\leqslant k\cdot c_k{}^{m_k}\leqslant t$,$k\cdot c_k{}^{m_k}\in\mathbf{Z}^+$,这些周期项在 $k<k\cdot c_k{}^{m_k}$ 时皆为常值,每个倍周期的周期项 X_k(算上初始值自身)一共有 m_k 项,那么所有的周期项一共有 $L=\sum_{k=1}^{l}m_k$ 项,则剩余的项共有 $T=t-L$ 项,剩余的项称为余项,余项可以是常数项,也可以是不具备周期性的随机项,也就是说一个序列中,有且仅有部分项是随机项且具有倍周期性,余下的项皆为普通随机项或常值,我们称这样的序列为“倍周期半随机序列”.

为了对倍周期半随机序列有一个更直观的认识,在这里用 R 语言绘制一个简单的例子,程序如下:

```
x = seq(1,1000,by = 1); T = 6; c = 0
x1 = seq(1,5,by = 1)
y1 = rnorm(5)
plot(x1,y1)
n = length(x); n1 = length(x1)
y = rep(0,n)
for(i in 1:n){
if(i < = n1)
y[i] = y1[i]
else if(i > n1&&x[i]%%T = = 0)
y[i] = y[which(x = = x[i]/T)]
else
y[i] = c
}
plot(x,y)
####周期取为 6,余项取为常数 0
```

利用此程序画出的图像见(图 1 一个倍周期半随机序列的例子).

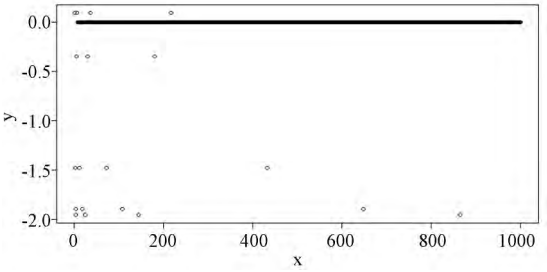


图 1 一个倍周期半随机序列的例子

3 分类、性质和信度

分类	倍周期半随机序列							
整倍周期	√	√	√	√				
非整倍周期					√	√	√	√
齐次	√	√			√	√		
非齐次			√	√			√	√
常余项	√		√		√		√	
非常余项		√		√		√		√

由表可知,根据周期、次、余项三者的情况,倍周期半随机序列可以分为八类,整倍周期是指对于序列中的周期项 X_k,$k=1,2,3,\cdots,l$,$c_1=c_2=\cdots=c_l$; 非倍整周期是指 $c_1,c_2,\cdots,c_l$ 不全相等,也就是说不同的周期项,其最小正倍周期不全相等; 齐次是指对于序列中的周期项 X_k,$k=1,2,3,\cdots,l$,$m_1=m_2=\cdots=m_l$; 非齐次是指对于序列中的周期项 $m_1,m_2,\cdots,m_l$ 不全相等; 常余项是指序列 X_i,$i=1,2,3,\cdots,t$ 中除了周期项以外的其余项,这样的项共有 $T=t-\sum_{k=1}^{l}(m_k+1)$ 项,若这 T 项均非随机项,是常数,则称之为常余项; 非常余项是指这 T 项也是随机变量,只不过不具有周期性,但是也不是常数. 所以根据上述的划分,我们可以将倍周期半随机序列划分为 8 种.

对于随机周期初始项 X_k,$k=1,2,3,\cdots,l$,如果不加以规定,则会发生以下问题,即 $\exists k=N$,$c_N=\lambda$,$m_N=\delta$,使得 $X_{N\cdot\lambda^{\delta}}=X_k$,所以必须有 $\forall X_k\neq X_{c_k{}^{m_k}}$,$m_k>0$,$k=1,2,3,\cdots,l$,也就是说某周期项的初始值,不可以等于另外一项周期项的非初始值; 另外,若 $\exists r、s\in k$,$m_R\leqslant m_r$,$m_S\leqslant m_s$,$c_r\neq c_s$ 使得 $r\cdot c_r{}^{m_R}=s\cdot c_s{}^{m_S}$,若 $X_{r\cdot c_r{}^{m_R}}=X_{s\cdot c_s{}^{m_S}}$,则项自然存在,

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

称其为倍周期半随机序列 X_i 的“二重周期项”. 由此延伸,可知若存在 n,$n \leqslant l$ 个周期初始项中 $\exists a_k \leqslant k \cdot c_k^{m_k}$,且 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$,若 $X_{a_1} = X_{a_2} = \cdots = X_{a_n}$,设 $a_1 = a_2 = \cdots a_n = \tau$,则称 X_τ 为倍周期半随机序列的“n 重聚合项”,此时该项取哪个值均可. 若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$,但是 $X_{a_1}, X_{a_2}, \cdots, X_{a_n}$ 不全相等,设 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \tau$,且 $X_{a_1}, X_{a_2}, \cdots, X_{a_n}$ 的不相等的项共有 y 个,则称 X_τ 为倍周期,半随机序列的“y 重矛盾项”; 聚合项的项数越多,每一项的重数越大,则称序列的聚合度越高; 矛盾项的项数越多,每一项的重数越大,则称序列的矛盾越大,含有矛盾项的周期项称为“伪倍周期项”.

假设某倍周期随机初始项为 X_{ij},$i = 1,2,3,\cdots,a$,$j = 1,2,3,\cdots,b(i)$,若 $\exists X_{rs}$,$r \in i$ 且 $r \leqslant a$,$s \in b(r)$ 且 $s \leqslant b(r)$,从剩余的 $a-1$ 个随机项中抽出一项 X_{uv},$u \in i$ 且 $u \leqslant a$,$v \in j$ 且 $v \leqslant b(u)$,若二者之间除它们之外存在 n_{uv} 项周期项相等,则说初始项 X_{rs} 对 X_{uv} 的聚合值为 n_{uv}. 同理,再从随机项初始项剩下的 $a-2$ 项中抽出一项 X_{gh},$g \in i$ 且 $g \leqslant a$,$h \in j$ 且 $h \leqslant b(g)$,若二者之间除它们之外存在 n_{gh} 项周期项相等,则说初始项 X_{rs} 对 X_{gh} 的聚合值为 n_{gh},依次推断,设比较 $a-1$ 次得到每次聚合值的过程为一次“遍历”,则对于这次遍历,聚合值的累积为 $N_{rs} = \sum_{k=1}^{a-1} n_{sk}$,固定刚才 $a-1$ 个项不变,取 X_{rz},$r \in i$ 且 $r \leqslant a$,$z \in b(r)$ 且 $z \leqslant b(r)$,再次对这 $a-1$ 项进行一次遍历,则聚合值的累积为 $N_{rz} = \sum_{k=1}^{a-1} n_{zk}$,则对于固定的 r,总遍历的累积为 $N_r = \sum_{j=1}^{b(r)} N_{rj} = \sum_{j=1}^{b(r)} \sum_{k=1}^{a-1} n_{rjk}$,序列的总遍历为 $N = \sum_{i=1}^{a} N_r = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b(i)} N_{ij} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b(i)} \sum_{k=1}^{a-1} n_{ijk}$.

同样假设某倍周期随机初始项为 X_{ij},$i = 1,2,3,\cdots,a$,$j = 1,2,3,\cdots,b(i)$,若 $\exists X_{rs}$,$r \in i$ 且 $r \leqslant a$,$s \in b(r)$,从剩余的 $a-1$ 个随机项中抽出一项 X_{uv},$u \in i$ 且 $u \leqslant a$,$v \in j$ 且 $v \leqslant b(u)$,若二者之间除它们之外存在 w_{uv} 个序号相等的矛盾项(数值不相等),则说初始项 X_{rs} 对 X_{uv} 的矛盾值为 w_{uv},同理,再从随机项初始项剩下的 $a-2$ 项中抽出一项 X_{gh},$g \in i$ 且 $g \leqslant a$,$h \in j$ 且 $h \leqslant b(g)$,若二者之间除它们之外存在 w_{gh} 个序号相等的矛盾项(数值不相等),则说初始项 X_{rs} 对 X_{gh} 的矛盾值为 w_{gh},依次推断,设比较 $a-1$ 次得到每次矛盾值的过程为一次“查访”,则对于这次查访,矛盾值的累积为 $W_{rs} = \sum_{k=1}^{a-1} w_{sk}$,固定刚才 $a-1$ 个项不变,取 X_{rz},$r \in i$ 且 $r \leqslant a$,$z \in b(r)$ 且 $r \leqslant a$,$z \in b(r)$,再次对这 $a-1$ 项进行一次查访,则矛盾值的累积为 $W_{rz} = \sum_{k=1}^{a-1} w_{zk}$,则对于固定的 r,总查访的累积为 $W_r = \sum_{j=1}^{b(r)} W_{rj} = \sum_{j=1}^{b(r)} \sum_{k=1}^{a-1} w_{rjk}$,序列的总查访为 $W = \sum_{i=1}^{a} W_r = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b(i)} W_{ij} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b(i)} \sum_{k=1}^{a-1} w_{ijk}$.

对于半随机序列的倍周期性而言,影响其真伪的主要是矛盾项,而不是聚合项,设倍周期半随机序列的伪度为 ρ,则对于周期项 X_{ij},$i = 1,2,3,\cdots,a$,$j = 1,2,3,\cdots,b(i)$,$\exists X_{rs}$,$r \in i$ 且 $r \leqslant a$,$s \in b(r)$ 且 $s \leqslant b(r)$,其伪度为 ρ_{rs},则可以用聚合值作为权重,得到伪度 ρ_{rs} 的表达式如下:

$$\rho_{rs} = \frac{\sum_{j=1}^{b(r)} \sum_{k=1}^{a-1} (w_{rjk} \cdot n_{rjk})}{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b(r)} \sum_{k=1}^{a-1} (w_{rjk} \cdot n_{rjk})}, \text{其中 } 0 \leqslant \rho_{rs} \leqslant 1.$$

设信度 $\pi_{rs} = 1 - \rho_{rs}$,同理我们可知 $0 \leqslant \pi_{rs} \leqslant 1$,则称 π_{rs} 为项 X_{rs} 的信度,也就是说,对于倍周期半随机序列 X_{ij} 中的某随机初始项 X_{rs},其存在倍周期性的可信度为 $100\pi_{rs}\%$.

那么,如果不存在聚合项,对于这种极端情况下的倍周期半随机序列,则通常可以使用随机概率来做为权数,设 X_{ij},$i = 1,2,3,\cdots,a$,$j = 1,2,3,\cdots,b(i)$,可设 $X_{ij} \sim \Delta_i$,Δ_i 是分布律或者分布函数,那么对于 $\forall x_{rs} \in X_{ij}$,其相应的概率为 $P(X_{ij} = x_{rs})$,其中 $r \in i$ 且 $r \leqslant a$,$s \in j$ 且 $s \leqslant b(r)$,那么对于 X_{rs},则自然可以求出其矛盾值,$W_r = \sum_{j=1}^{b(r)} W_{rj} = \sum_{j=1}^{b(r)} \sum_{k=1}^{a-1} w_{rjk}$,也可以求出序列的总矛盾值,也就是所谓的总查访 $W = \sum_{i=1}^{a} W_r = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b(i)} W_{ij} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b(i)} \sum_{k=1}^{a-1} w_{ijk}$,因为下标 j 的取值是 1 到 $b(i)$,表示当 i 固定时,共有 $b(i)$ 个随机变量的值分别同 $a-1$ 个随机项的取值进行了 $a-1$ 次查访,当然由前述可知,这 $a-1$ 个随机项从第 1 次查访以后就是固定的,比如 $X_{2j} = x_{2j}$,$X_{3j} = x_{32}$,$X_{4j} = x_{42}$,用 x_{21} 同做 1 次查访后,又随机取另外的数 $X_{2j} = x_{22}$,此时 x_{32},x_{42} 固定不变,用 x_{22} 同 x_{32},x_{42} 再进行 1 次查访,所以对于 x_{32},x_{42},虽然它们被查访了 $b(2)$ 次,但是只有第 1 次是随机出现的,剩下的 $b(2)-1$ 次均是固定的值,不是随机出现,所以对于

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$X_{rj}, j = 1,2,3,\cdots,b(r)$,一共进行了 $b(r)(a-1)$ 次查访,每一组 $a-1$ 次查访出现的概率有 a 个,且仅取决于第 1 次时 a 个随机变量出现的概率,设其为 $P_{rjk} = \prod_a p_{rjk}$,则对于固定的 r 而言,进行了 $b(r)(a-1)$ 次查访的概率为 $P_r = \sum_{j=1}^{b(r)}(P_{rjk}) = \sum_{j=1}^{b(r)}(\prod_a p_{rjk})$,那么假设伪度为 ρ_{rs},则

$$\rho_{rs} = \frac{\sum_{j=1}^{b(r)}\sum_{k=1}^{a-1}[w_{rjk}\cdot(\prod_a p_{rjk})]}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b(r)}\sum_{k=1}^{a-1}[w_{ijk}\cdot(\prod_a p_{ijk})]},$$

同理可知 $0 \leqslant \rho_{rs} \leqslant 1$,则信度 $\pi_{rs} = 1-\rho_{rs}$,$0 \leqslant \pi_{rs} \leqslant 1$.

4 聚合点与矛盾点

假设某倍周期随机初始项为 $X_{ij}, i = 1,2,3,\cdots,a, j = 1,2,3,\cdots,b(i)$,若 $\exists X_{rs}, r \in i$ 且 $r \leqslant a, s \in b(r)$ 且 $s \leqslant b(r)$,从剩余的 $a-1$ 个随机项中抽出一项 $X_{uv}, u \in i$ 且 $u \leqslant a, v \in j$ 且 $v \leqslant b(u)$,若二者之间除它们之外存在 n_{uv} 项周期项相等,相等项的数值一共有 e_{uv} 个,则说初始项 X_{rs} 对 X_{uv} 的聚合值为 n_{uv},聚合点的个数为 e_{uv},可知 $e_{uv} \leqslant n_{uv}$;同理,再从随机项初始项剩下的 $a-2$ 项中抽出一项 $X_{gh}, g \in i$ 且 $g \leqslant a, h \in j$ 且 $h \leqslant b(g)$,若二者之间除它们之外存在 n_{gh} 项周期项相等,相等项的数值一共有 e_{gh} 个,则说初始项 X_{rs} 对 X_{gh} 的聚合值为 n_{gh},聚合点的个数为 e_{gh},可知 $e_{gh} \leqslant n_{gh}$. 依次推断,设比较 $a-1$ 次得到每次聚合点的过程为一次“更新”,则对于这次更新,聚合点的个数的累积为 $E_{rs} = \sum_{k=1}^{a-1} e_{sk}$,固定刚才 $a-1$ 个项不变,取 $X_{rz}, r \in i$ 且 $r \leqslant a, z \in b(r)$ 且 $z \leqslant b(r)$,再次对这 $a-1$ 项进行一次更新,则聚合点的累积为 $E_{rz} = \sum_{k=1}^{a-1} e_{zk}$,则对于固定的 r,总更新的累积为 $E_r = \sum_{j=1}^{b(r)} E_{rj} = \sum_{j=1}^{b(r)}\sum_{k=1}^{a-1} e_{rjk}$,序列的总更新为 $E = \sum_{i=1}^{a} E_r = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b(i)} E_{ij} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b(i)}\sum_{k=1}^{a-1} e_{ijk}$;对于某随机项 X_{rs},设其聚合率为 η_{rs},聚合率表示聚合值在聚合点上聚集的程度,$\eta_{rs} = \frac{\sum_{k=1}^{a-1} e_{sk}}{\sum_{k=1}^{a-1} n_{sk}}$,可知 $0 \leqslant \eta_{rs} \leqslant 1$,设统计量为 φ_{rs},$\varphi_{rs} = 1-\eta_{rs}$,将其命名为离散率,顾名思义是指序号相等的周期项在不同值上的发散程度,$0 \leqslant \varphi_{rs} \leqslant 1$,发散率越高,发散的程度越大,聚合的程度越小,对于固定的 r,其离散率为 $\varphi_r = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{b(r)}\sum_{k=1}^{a-1} e_{rjk}}{\sum_{j=1}^{b(r)}\sum_{k=1}^{a-1} n_{rjk}}$,对于整个序列,其离散率为 $\varphi = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b(r)}\sum_{k=1}^{a-1} e_{ijk}}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b(r)}\sum_{k=1}^{a-1} n_{ijk}}$;若 $\varphi_{rs} > \varphi_r$,则说某随机项 X_{rs} 相对于该组随机项 X_r 较为发散;若 $\varphi_{rs} > \varphi$,则说明某随机项 X_{rs} 相对于整个倍周期半随机序列 X 较为发散,同理可得其余情况.

同样假设某倍周期随机初始项为 $X_{ij}, i = 1,2,3,\cdots,a, j = 1,2,3,\cdots,b(i)$,若 $\exists X_{rs}, r \in i$ 且 $r \leqslant a$,$s \in b(r)$ 且 $s \leqslant b(r)$,从剩余的 $a-1$ 个随机项中抽出一项 $X_{uv}, u \in i$ 且 $u \leqslant a, v \in j$ 且 $v \leqslant b(u)$,若二者之间除它们之外存在 w_{uv} 个序号相等的矛盾项(数值不相等),序号相等的不等数值的个数为 f_{uv},则说初始项 X_{rs} 对 X_{uv} 的矛盾值为 w_{uv},矛盾点的个数为 f_{uv},$f_{uv} \geqslant w_{uv}$. 同理,再从随机项初始项剩下的 $a-2$ 项中抽出一项 $X_{gh}, g \in i$ 且 $g \leqslant a, h \in j$ 且 $h \leqslant b(g)$,若二者之间除它们之外存在 w_{gh} 个序号相等的矛盾项(数值不相等),序号相等的不等数值的个数为 f_{gh},则说初始项 X_{rs} 对 X_{gh} 的矛盾值为 w_{gh},矛盾点的个数为 f_{gh},$f_{gh} \geqslant w_{gh}$. 依次推断,设比较 $a-1$ 次得到每次矛盾点的过程为一次“检测”,则对于这次检测,矛盾点个数的累积为 $F_{rs} = \sum_{k=1}^{a-1} f_{sk}$,固定刚才 $a-1$ 个项不变,取 $X_{rz}, r \in i$ 且 $r \leqslant a, z \in b(r)$ 且 $z \leqslant b(r)$,再次对这 $a-1$ 项进行一次检测,则矛盾点个数的累积为 $F_{rz} = \sum_{k=1}^{a-1} f_{zk}$,则对于固定的 r,总检测的累积为 $F_r = \sum_{j=1}^{b(r)} F_{rj} = \sum_{j=1}^{b(r)}\sum_{k=1}^{a-1} f_{rjk}$,序列的总检测为 $F = \sum_{i=1}^{a} F_r = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b(i)} F_{ij} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b(i)}\sum_{k=1}^{a-1} f_{ijk}$;对于某随机项 X_{rs},设其矛盾率为 κ_{rs},可知 $\kappa_{rs} = \frac{\sum_{k=1}^{a-1} w_{sk}}{\sum_{k=1}^{a-1} f_{sk}}$,$0 \leqslant \kappa_{rs} \leqslant 1$,设新的统计量为 Ω_{rs},将其命名为真实率,令 $\Omega_{rs} = 1-\kappa_{rs}$,可知 $0 \leqslant \Omega_{rs} \leqslant 1$,那么对于固定的 r,其真实率 $\Omega_r = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{b(r)}\sum_{k=1}^{a-1} w_{rjk}}{\sum_{j=1}^{b(r)}\sum_{k=1}^{a-1} f_{rjk}}$,对于整个倍周期半随

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

机序列，真实率 $\Omega = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b(r)}\sum_{k=1}^{a-1} w_{ijk}}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b(r)}\sum_{k=1}^{a-1} f_{ijk}}$，真实率越高，则说明伪倍周期性的可能性越小，序列项或者序列是倍周期随机项的可能性越大. 若 $\Omega_{rs} > \Omega_r$，则说某随机项 X_{rs} 相对于该组随机项 X_r 的倍周期性较强; 若 $\Omega_{rs} > \Omega$，则说明某随机项 X_{rs} 相对于整个倍周期半随机序列 X 的倍周期性较强，同理可得其余情况.

进一步对聚合点研究，我们可以发现，如果 X_a 与 X_b 一共在 k 项发生重复，那么对于 X_a、X_b，则分别有 k 项发生重复，如果设每一组重复项(2 项) 重复的值为 X_{abi}，$i = 1,2,3,\cdots,k$，X_{abi} 互不相等，最此时聚合点的个数为 k，是聚合点最多的情况，此时的项数为 $2k$，也就是说，聚合率的最大值 $\max\{\eta\} = (k/2k) \times 100\% = 50\%$，则 $0 \leqslant \eta \leqslant 0.5$，而矛盾率依然是 $0 \leqslant \Omega \leqslant 1$. 因为可以知道对于 $2k$ 项矛盾项，每一项都取不同的值，则最多有 $2k$ 项，故矛盾率的最大值依然是 100%.

参 考 文 献

[1] Li Yongkun, Li Bing. Almost Periodic Time Scales and Almost Periodic Functions on Time Scales [J]. Journal of Applied Mathematics, 2015, 2015: 1120 – 1125.

[2] Agoshkova T A. Approximation of Periodic Functions of Many Variables in Metric Spaces by Piecewise-Constant Functions [J]. Ukrainian Mathematical, 2014, 65(10): 1447 – 1459.

[3] Pritchard G. Sample behavior of some random series [J]. Theoretical Probability, 1996, 9(4): 1039 – 1056.

[4] 廉玉忠，沈世镒. 周期性随机序列的非线性复杂度 [J]. 科学通报, 1995(22): 2026 – 2028.

[5] 李昊，谢端强. 2009 通信理论与技术新发展——第十四届全国青年通信学术会议论文集 [C]. 辽宁大连: 中国通信学会青年工作委员会, 2009.

Definition and Properties of Multiple Periodic Semi-Random Series

Chen Yiyan[1]　Li Ye[2]

(1. Department of Statistic, Renmin University, Beijing　100872; 2. Department of Math and Statistic, Capital Normal University, Beijing　100048)

Abstract

With the combination of knowledge for mathematics and mathematical statistics, a new series have been created, some items, with random emergence which obey the same or different distribution, are also in periodic, differ in traditional periodic, but in Multiplier relationship between serial numbers are equal. At the same time, within items between serial numbers, is able to get others through the first item and period. therefore, though the first items have periodic, there are nonrandom items in Multiplier relationship between serial numbers, in this case, random items and nonrandom items are coexist in the series named 'Multiple Periodic Semi-random Series'. This paper give an outline of the definition and properties of Multiple Periodic Semi-random Series, also making use of R language to draw an example.

Key words: multiple period, semi-random, R language.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net