DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.05.001

关于自然数幂和的一个新公式*

邓 勇

(喀什大学数学与统计学院,新疆 喀什 844006)

摘 要

利用两类 Stirling 数给出了前 n 个自然数 p 次幂和公式的有限离散卷积表示.

关键词: 幂和, 离散卷积, 对称函数.

中图分类号: O156.1

从公元前 6 世纪古希腊毕达哥拉斯开始研究自然数幂和以来,该问题一直是人们研究的热点. 在数论、特殊函数论及组合计数等领域,两类 Stirling 数和 Euler 数以及 Bernoulli 数等特殊数更是引起人们的极大兴趣,它们的广泛应用越来越受到数学家们的关注. 自从 James Bernoulli 在求自然数幂和时给出 Bernoulli 数后,就注定了 Bernoulli 数与自然数的幂和之间有着不可分割的联系,而作为与之相关的 Stirling 数、Bernoulli 数也不可避免地与自然数的幂和发生着联系. 几千年来,人们一直在揭示它们之间的关系,并得到了许多有趣的结论,对自然数幂和的发展起到了推动作用[1-3]. 伴随着 Euler 数和 Bernoulli 数的发展,又衍生出诸如 Euler 多项式、Bernoulli 多项式及高阶 Euler 数和高阶 Bernoulli 数等相应的定义及其定理,这些公式也进一步推动了特殊数的发展[4-6].

众所周知,自然数前 n 项的 p 次幂之和

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p,$$

是 n 的 $(p+1)$ 次多项式函数,而多项式的系数与 Bernoulli 数 B_k 有关. 因此,$\sum_{k=1}^{n} k^p$ 可表为

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{p+1}^{k} B_k n^{p+1-k},$$

其中 $B_1 = -\frac{1}{2}$,的形式[7].

本文给出计算自然数前 n 项 p 次幂之和的有限离散卷积公式. 为方便叙述,先简要回顾几个基本概念.

定义 1[8] n 元集合$\{1,2,\cdots,n\}$ 恰有 i 个循环的置换个数称为无符号第一类 Stirling 数,记为$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$,$(i = 1,2,\cdots,n)$.

定义 2[8] 假设 A 是一个非空集合,$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是集合 A 的非空子集,若

(a) $A_i \cap A_j = \varnothing, (i \neq j)$;

(b) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = A$.

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为集合 A 的一个 k 类分划.

定义 3[8] n 元集合$\{1,2,\cdots,n\}$ 划分为 k 个非空子集合的分划个数称为第二类 Stirling 数,记为$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$,$(k = 1,2,\cdots,n)$.

注意到,实变元 x 的 n 次降阶乘$(x)_n$,即

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1),$$

可用无符号第一类 Stirling 数的恒等式

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k,$$

表示; 第二类 Stirling 数则是反演公式

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (x)_k$$

中 $(x)_k$ 的系数[9].

定义 4[10] 两个离散序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的离散

收稿日期: 2015-11-17

* 国家社科基金项目(编号: 11XTJ001).

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

卷积是按照一定规则将其有关序列值分别两两相乘再相加的一种特殊运算. 其计算公式为

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \cdot h(n-i).$$

其中 $y(n)$ 是经卷积运算后得到的新序列.

定理 设 n 和 p 是两个自然数. 则

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} k \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1-k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n+p-k \\ n \end{Bmatrix}.$$

证明 考虑如下两个关于 Stirling 数的形式幂级数恒等式

$$E(t) = \prod_{k=1}^{n} (1 + k \cdot t) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1-k \end{bmatrix} t^k$$

和

$$H(t) = \prod_{k=1}^{n} (1 - k \cdot t)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+k \\ n \end{Bmatrix} t^k,$$

其中 $|t| < 1/n$. 注意到,$E(-t)H(t) = 1$,且容易证明

$$\frac{d}{dt}\ln H(t) = E'(-t)H(t),$$

其中

$$E'(-t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1-k \end{bmatrix} (-t)^{k-1}.$$

于是有

$$\frac{d}{dt}\ln H(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1-k \end{bmatrix} (-t)^{k-1} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+k \\ n \end{Bmatrix} t^k \right). \quad (1)$$

另一方面,当 $|t| < 1/n$ 时,通过简单地计算又可得

$$\frac{d}{dt}\ln H(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1-k \cdot t} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} k^j t^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} k^j t^{j-1}. \quad (2)$$

由(1)和(2)可得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} k^j t^{j-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} k \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1-k \end{bmatrix} (-t)^{k-1} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+k \\ n \end{Bmatrix} t^k \right).$$

整理化简等式右边,并比较等式两边 t^p 的系数即得所求.

参 考 文 献

[1] 张帆. 贝努利多项式与幂和等式[D]. 天津: 南开大学, 2009.

[2] 尹志凌,张升,陈宝平. Stirling 数表示自然数方幂和[J]. 内蒙古农业大学学报(自然科学版),2010,31(1):267-270.

[3] 朱伟义. 自然数幂和公式系数的递推公式和有关 Bernoulli 数的计算公式[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版),2005,28(2):128-131.

[4] 杨胜良,马成业. 高阶 Bernoulli 多项式、高阶 Euler 多项式与 Stirling 数的关系[J]. 兰州理工大学学报,2009,35(2):146-149.

[5] 朱伟义. 高阶 Bernoulli 数与 Stirling 数的几个恒等式[J]. 大学数学,2006,22(1):83-86.

[6] 高泽图. 高阶 Euler 多项式和高阶 Bernoulli 多项式的计算公式[J]. 海南大学学报(自然科学版),2005,23(1):9-12.

[7] 罗见今. 自然数幂和公式的发展[J]. 高等数学研究,2004,7(4):56-61.

[8] 张先迪. 组合原理及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社,2006: 167-169.

[9] 齐登记. 无符号第一类 Stirling 数的组合数表示[J]. 青岛科技大学学报(自然科学版),2011,32(3):327-329.

[10] 熊庆旭,刘锋,常青. 信号与系统[M]. 北京: 高等教育出版社,2011.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

A New Formula on Power Sum of Natural Numbers

Deng Yong

(College of Mathematics and Statistics, Kashgar University, Kashgar Xinjiang　844006)

Abstract

By using two kinds of Stirling numbers, the sums of powers of natural number can be expressed as finite discrete convolutions.

Key words: sums of powers, discrete convolution, symmetric function.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net