DOI:10.19789/j.1004-9398.2017.01.003

平方s-凸函数及其性质*

宋振云
(湖北职业技术学院机电工程学院,湖北 孝感 432000)

摘 要

在凸函数和Godunova-Levin函数研究的基础上,针对平方凸函数的推广问题,分析从凸函数到s-凸函数的逻辑演变过程,提出了平方s-凸函数的概念,讨论了平方s-凸函数的判定定理及其运算性质,建立了平方s-凸函数的Jensen型不等式和Hadamard型不等式.

关键词: s-凸函数,平方s-凸函数,判定定理,运算性质,Jensen型不等式.
中图分类号: O178.1

0 引 言

在控制理论、优化理论和线性规划等领域,函数凸性及其广义凸性的工具作用已愈来愈显突出,尤其是在处理解决问题时的不可替代性作用的逐渐显现,已引起广泛关注和重视. 对凸函数的分类和推广研究也成为了近年来数学研究中凸分析领域的一个热点之一. 仅仅只就实数区间上的幂平均所定义的凸函数,就有如几何凸函数[1]、调和凸函数[2]、平方凸函数[3]、调和平方凸函数[4]、r-平均凸函数[5]等. 这些凸函数的提出,极大地丰富了凸分析的内容,推动了凸分析的发展,扩大了凸函数的应用范围. 然而,文献[6]则从另一个方向考虑,定义了Godunova-Levin函数:

定义1 设$f(x)$是定义在区间$I\subseteq \mathbf{R}$上的非负值函数,若$\forall x_1,x_2\in I$及$\forall \lambda\in(0,1)$,有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \frac{f(x_1)}{\lambda}+\frac{f(x_2)}{1-\lambda} \quad (1)$$

则称$f(x)$是Godunova-Levin函数,或称$f(x)$属于$Q(I)$函数类.

文献[7]针对凸函数和Godunova-Levin函数的推广问题,定义了s-凸函数:

定义2 设$I\subseteq \mathbf{R}$,$s\in(0,1]$,$f:I\to \mathbf{R}$,若$\forall x_1,x_2\in I$及$\forall \lambda\in[0,1]$,有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \lambda^s f(x_1)+(1-\lambda)^s f(x_2) \quad (2)$$

则称$f(x)$为I上的s-凸函数,或称$f(x)$属于K_s^2函数类.

受其影响和启发,本文考虑平方凸函数的推广问题,提出了平方s-凸函数的概念,讨论了平方s-凸函数的若干判定定理和性质,建立了平方s-凸函数的Jensen型不等式,并给出了平方s-凸函数的一个Hermite-Hadamard型不等式.

定义3 设$I\subseteq \mathbf{R}^+$,$s\in(0,1]$,$f:I\to \mathbf{R}^+$,若$\forall x_1,x_2\in I$及$\forall t\in[0,1]$,有

$$f\left(\sqrt{tx_1^2+(1-t)x_2^2}\right)\leqslant \sqrt{t^s(f(x_1))^2+(1-t)^s(f(x_2))^2}. \quad (3)$$

则称$f(x)$为I上的平方s-凸函数. 若不等式(3)中的不等号反向,则称$f(x)$为I上的平方s-凹函数.

显然,当$s=1$时,平方s-凸函数即为通常的平方凸函数.

1 平方s-凸函数的判定及性质

由于区间$I\subseteq \mathbf{R}^+$上的函数$\tau(x)=x^2$是单调递增的,本文中我们记$\tau(I)=I^2$.

定理1 设$I\subseteq \mathbf{R}^+$,$s\in(0,1]$,$f:I\to \mathbf{R}^+$,则$f(x)$为I上的平方s-凸(凹)函数的充要条件是函数$(f(x^{1/2}))^2$为I^2上的s-凸(凹)函数.

证明 令$g(x)=(f(x^{1/2}))^2(x\in I^2)$.

充分性. $\forall x_1,x_2\in I$及$\forall t\in[0,1]$,由正数幂

收稿日期:2015-09-13
* 湖北省教育科学"十二五"规划项目(2014A060).

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

平均的性质[8] 知，$\sqrt{tx_1^2+(1-t)x_2^2}\in[\min\{x_1,x_2\},\max\{x_1,x_2\}]\subseteq I$，且 $x_1^2,x_2^2\in I^2$，因此，$\forall t\in[0,1]$，亦有 $tx_1^2+(1-t)x_2^2\in[\min\{x_1^2,x_2^2\},\max\{x_1^2,x_2^2\}]\subseteq I^2$. 因为 $g(x)=(f(x^{1/2}))^2$ 为 I^2 上的 s-凸函数，所以，$\forall x_1,x_2\in I$ 及 $\forall t\in[0,1]$，有

$$f\left(\sqrt{tx_1^2+(1-t)x_2^2}\right)=\sqrt{g(tx_1^2+(1-t)x_2^2)}$$
$$\leqslant\sqrt{t^sg(x_1^2)+(1-t)^sg(x_2^2)}$$
$$=\sqrt{t^s(f(x_1))^2+(1-t)^s(f(x_2))^2},$$

故 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凸函数.

必要性. $\forall x_1,x_2\in I^2$ 及 $\forall t\in[0,1]$，显然有 $tx_1+(1-t)x_2\in I^2\Rightarrow\sqrt{tx_1+(1-t)x_2}\in I$. 若 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凸函数，则

$$g(tx_1+(1-t)x_2)=[f(\sqrt{tx_1+(1-t)x_2})]^2$$
$$=[f(\sqrt{t(x_1^{1/2})^2+(1-t)(x_2^{1/2})^2})]^2$$
$$\leqslant t^s(f(x_1^{1/2}))^2+(1-t)^s(f(x_2^{1/2}))^2$$
$$=t^sg(x_1)+(1-t)^sg(x_2),$$

故 $g(x)=(f(x^{1/2}))^2$ 为 I^2 上的 s-凸函数.

同理可证定理的后半部分.

定理 2 设 $I\subseteq\mathbf{R}^+$，$s\in(0,1]$，$f:I\to\mathbf{R}^+$，则 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凸(凹)函数的充要条件是 $\varphi(t)=[f(\sqrt{tx_1^2+(1-t)x_2^2})]^2$($\forall x_1,x_2\in I$) 为 $[0,1]$ 上的 s-凸(凹)函数.

证明 由 $\varphi(t)=[f(\sqrt{tx_1^2+(1-t)x_2^2})]^2$($t\in[0,1]$)得，$\varphi(0)=[f(x_2)]^2$，$\varphi(1)=[f(x_1)]^2$，

充分性. 若 $\varphi(t)$ 是 $[0,1]$ 上的 s-凸函数，则 $\forall t\in[0,1]$ 及 $\forall x_1,x_2\in I$，有

$$[f(\sqrt{tx_1^2+(1-t)x_2^2})]^2=\varphi(t)=\varphi(t\times1+(1-t)\times0)\leqslant t^s\varphi(1)+(1-t)^s\varphi(0)=t^s(f(x_1))^2+(1-t)^s(f(x_2))^2,$$

即 $$f\left(\sqrt{tx_1^2+(1-t)x_2^2}\right)\leqslant\sqrt{t^s(f(x_1))^2+(1-t)^s(f(x_2))^2},$$

故 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凸函数.

必要性. $\forall x_1,x_2\in I$ 及 $\forall t_1,t_2\in[0,1]$，显然有 $\sqrt{t_1x_1^2+(1-t_1)x_2^2}\in I$，$\sqrt{t_2x_1^2+(1-t_2)x_2^2}\in I$，设 $X_1=\sqrt{t_1x_1^2+(1-t_1)x_2^2}$，$X_2=\sqrt{t_2x_1^2+(1-t_2)x_2^2}$，则 $\forall\alpha\in[0,1]$，也有 $\sqrt{\alpha X_1^2+(1-\alpha)X_2^2}\in I$，

若 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凸函数，则 $\forall t_1,t_2\in[0,1]$ 及 $\forall\alpha\in[0,1]$，有

$$\varphi(\alpha t_1+(1-\alpha)t_2)=[f(\sqrt{(\alpha t_1+(1-\alpha)t_2)x_1^2+(1-(\alpha t_1+(1-\alpha)t_2))x_2^2})]^2$$
$$=[f(\sqrt{\alpha(t_1x_1^2+(1-t_1)x_2^2)+(1-\alpha)(t_2x_1^2+(1-t_2)x_2^2)})]^2=[f(\sqrt{\alpha X_1^2+(1-\alpha)X_2^2})]^2$$
$$\leqslant\alpha^s(f(X_1))^2+(1-\alpha)^s(f(X_2))^2$$
$$=\alpha^s[f(\sqrt{t_1x_1^2+(1-t_1)x_2^2})]^2+(1-\alpha)^s[f(\sqrt{t_2x_1^2+(1-t_2)x_2^2})]^2$$
$$=\alpha^s\varphi(t_1)+(1-\alpha)^s\varphi(t_2),$$

故 $\varphi(t)=[f(\sqrt{tx_1^2+(1-t)x_2^2})]^2$($\forall x_1,x_2\in I$) 是 $[0,1]$ 上的 s-凸函数.

同理可证定理的后半部分.

定理 3 设 $I\subseteq\mathbf{R}^+$，$s\in(0,1]$，$f:I\to\mathbf{R}^+$，则 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凸(凹)函数的充要条件是 $\forall x_1,x_2,x_3\in I$ 且 $x_1<x_2<x_3$，有

$$(x_3^2-x_2^2)^s(f(x_1))^2-(x_3^2-x_1^2)^s(f(x_2))^2+(x_2^2-x_1^2)^s(f(x_3))^2\geqslant(\leqslant)0. \quad (3)$$

证明 必要性. $\forall x_1,x_2,x_3\in I$ 且 $x_1<x_2<x_3$，设 $\lambda=\dfrac{x_3^2-x_2^2}{x_3^2-x_1^2}$，则 $x_2=\sqrt{\lambda x_1^2+(1-\lambda)x_3^2}$，

若 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凸函数，则

$$(f(x_2))^2=[f(\sqrt{\lambda x_1^2+(1-\lambda)x_3^2})]^2$$
$$\leqslant\lambda^s(f(x_1))^2+(1-\lambda)^s(f(x_3))^2$$
$$=\left(\frac{x_3^2-x_2^2}{x_3^2-x_1^2}\right)^s(f(x_1))^2+\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{x_3^2-x_1^2}\right)^s(f(x_3))^2,$$

注意到 $s\in(0,1]$ 且 $(x_3^2-x_1^2)^s>0$，将上式整理即得

$$(x_3^2-x_2^2)^s(f(x_1))^2-(x_3^2-x_1^2)^s(f(x_2))^2+(x_2^2-x_1^2)^s(f(x_3))^2\geqslant0.$$

由于以上证明步步可逆，所以充分性成立.

若 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凹函数，则上述证明中的不等号反向，定理 3 的后半部分得证.

定理 4 设 $f(x)$ 是 $I\subseteq\mathbf{R}^+$ 上的正值函数，且二阶可导，

(i) 若 $\forall x\in I$ 有 $x[f(x)f''(x)+(f'(x))^2]-f(x)f'(x)\geqslant0$，则 $f(x)$ 为 I 上平方 s-凸函数.

(ii) 若 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凹函数，则 $\forall x\in I$ 有 $x[f(x)f''(x)+(f'(x))^2]-f(x)f'(x)\leqslant0$.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证明　$\forall t \in [0,1]$ 及 $s \in (0,1] \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant t^s \leqslant 1$,因为 $\forall x_1, x_2 \in I, f(x_1), f(x_2) > 0$,所以,有 $t(f(x_1))^2 \leqslant t^s (f(x_1))^2$,同理,$(1-t)(f(x_2))^2 \leqslant (1-t)^s (f(x_2))^2$,由此得

$$t(f(x_1))^2 + (1-t)(f(x_2))^2 \leqslant t^s (f(x_1))^2 + (1-t)^s (f(x_2))^2.$$

即

$$\sqrt{t(f(x_1))^2 + (1-t)(f(x_2))^2} \leqslant \sqrt{t^s (f(x_1))^2 + (1-t)^s (f(x_2))^2}.$$

(i) 若 $\forall x \in I$ 有 $x[f(x)f''(x) + (f'(x))^2] - f(x)f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)$ 是 I 上的平方凸函数,则有

$$f\left(\sqrt{tx_1^2 + (1-t)x_2^2}\right) \leqslant \sqrt{t(f(x_1))^2 + (1-t)(f(x_2))^2} \leqslant \sqrt{t^s (f(x_1))^2 + (1-t)^s (f(x_2))^2}.$$

即 $f(x)$ 是 I 上的平方 s-凸函数.

(ii) 若 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凹函数,则有

$$f\left(\sqrt{tx_1^2 + (1-t)x_2^2}\right) \geqslant \sqrt{t^s (f(x_1))^2 + (1-t)^s (f(x_2))^2} \geqslant \sqrt{t(f(x_1))^2 + (1-t)(f(x_2))^2}.$$

即 $f(x)$ 是 I 上的平方凹函数. 等价可推出,对 $\forall x \in I$ 有 $x[f(x)f''(x) + (f'(x))^2] - f(x)f'(x) \leqslant 0$.

定理 5　设 $I \subseteq \mathbf{R}^+, A \subseteq R, f: I \to \mathbf{R}^+, \mu: A \to B \subseteq I$,则

(i) 若 $y = f(u)$ 是 I 上严格递增的平方 s-凸函数,$u = \mu(x)$ 是 A 上的平方凸函数,则 $y = f(\mu(x))$ 是 A 上的平方 s-凸函数;

(ii) 若 $y = f(u)$ 是 I 上严格递减的平方 s-凸函数,$u = \mu(x)$ 是 A 上的平方凹函数,则 $y = f(\mu(x))$ 是 A 上的平方 s-凸函数;

(iii) 若 $y = f(u)$ 是 I 上严格递增的平方 s-凹函数,$u = \mu(x)$ 是 A 上的平方凹函数,则 $y = f(\mu(x))$ 是 A 上的平方 s-凹函数;

(iv) 若 $y = f(u)$ 是 I 上严格递减的平方 s-凹函数,$u = \mu(x)$ 是 A 上的平方凸函数,则 $y = f(\mu(x))$ 是 A 上的平方 s-凹函数;

证明　仅证(i),同理可证(ii)、(iii)、(iv).

$\forall x_1, x_2 \in A$ 及 $\forall t \in [0,1]$,显然有,

$\mu(x_1), \mu(x_2), \mu\left(\sqrt{tx_1^2 + (1-t)x_2^2}\right)$,

$\sqrt{t(\mu(x_1))^2 + (1-t)(\mu(x_2))^2} \in B \subseteq I$,

因为 $u = \mu(x)$ 是 A 上的平方凸函数,$y = f(u)$ 是 I 上严格递增的平方 s-凸函数,所以

$$f\left(\mu\left(\sqrt{tx_1^2 + (1-t)x_2^2}\right)\right) \leqslant f\left(\sqrt{t(\mu(x_1))^2 + (1-t)(\mu(x_2))^2}\right) \leqslant \sqrt{t^s [f(\mu(x_1))]^2 + (1-t)^s [f(\mu(x_2))]^2}$$

根据定义 2 知 $y = f(\mu(x))$ 是 A 上的平方 s-凸函数.

2　平方 s-凸函数的 Jensen 型不等式

定理 6　设 $f(x)$ 为 $I \subseteq \mathbf{R}^+$ 上的平方 s-凸函数,则 $\forall x_i \in I$ 及 $\forall t_i \in \mathbf{R}^+ (i = 1,2,\cdots,n)$,$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$,有

$$f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i^2}\right) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} t_i^s (f(x_i))^2}. \tag{6}$$

若 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凹函数,则不等式(6)中的不等号反向.

证明　(用数学归纳法)　设 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凸函数,

当 $n = 1$ 时,$t_1 = 1$,(6) 式为恒等式,所以,当 $n = 1$ 时定理成立.

当 $n = 2$ 时,$\forall x_1, x_2 \in I$ 及 $\forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}^+$,且 $t_1 + t_2 = 1$,由平方 s-凸函数的定义 3 有,

$$f\left(\sqrt{t_1 x_1^2 + t_2 x_2^2}\right) = f\left(\sqrt{t_1 x_1^2 + (1-t_1)x_2^2}\right) \leqslant \sqrt{t_1^s (f(x_1))^2 + (1-t_1)^s (f(x_2))^2} = \sqrt{t_1^s (f(x_1))^2 + t_2^s (f(x_2))^2}$$

所以,当 $n = 2$ 时定理成立. 假设 $n = k$ 时定理成立,即 $\forall x_i \in I$ 及 $\forall t_i \in \mathbf{R}^+ (i = 1,2,\cdots,k)$,$\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$,有

$$f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k} t_i x_i^2}\right) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} t_i^s (f(x_i))^2},$$

则当 $n = k+1$ 时,$\forall x_i \in I, \forall t_i \in \mathbf{R}^+ (i = 1,2,\cdots,k,k+1)$,$\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$,并注意到

$$\sqrt{\frac{t_k}{t_k + t_{k+1}} x_k^2 + \frac{t_k}{t_k + t_{k+1}} x_{k+1}^2} \in I$$

根据假设和平方 s-凸函数的定义 3,有

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}t_ix_i^2}\right)=f\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k-1}t_ix_i^2\right)+(t_k+t_{k+1})\left(\sqrt{\frac{t_k}{t_k+t_{k+1}}x_k^2+\frac{t_{k+1}}{t_k+t_{k+1}}x_{k+1}^2}\right)^2}\right)$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1}t_i^s(f(x_i))^2+(t_k+t_{k+1})^s\left[f\left(\sqrt{\frac{t_k}{t_k+t_{k+1}}x_k^2+\frac{t_{k+1}}{t_k+t_{k+1}}x_{k+1}^2}\right)\right]^2}$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1}t_i^s(f(x_i))^2+(t_k+t_{k+1})^s\left[\left(\frac{t_k}{t_k+t_{k+1}}\right)^s(f(x_k))^2+\left(\frac{t_{k+1}}{t_k+t_{k+1}}\right)^s(f(x_{k+1}))^2\right]}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1}t_i^s(f(x_i))^2+t_k^s(f(x_k))^2+t_{k+1}^s(f(x_{k+1}))^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}t_i^s(f(x_i))^2}$$

即,当 $n=k+1$ 时,不等式(6)成立,故对于一切自然数,若 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凸函数,则不等式(6)成立,即当 $n=k+1$ 时定理成立.

同样的方法可证明:若 $f(x)$ 为 I 上的平方 s-凹函数,则不等式(6)中的不等号反向.关于定理 6,它的一个等价形式为:

定理 7 设 $s\in(0,1]$,若 $f(x)$ 为 $I\subseteq\mathbf{R}^+$ 上的平方 s-凸函数,则 $\forall x_i\in I$ 及 $\forall p_i\in\mathbf{R}^+$,$(i=1,2,\cdots,n)$,有

$$f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{p_1+p_2+\cdots+p_n}x_i^2}\right)\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^s(f(x_i))^2}.\quad(7)$$

若 $f(x)$ 为 $I\subseteq\mathbf{R}^+$ 上的平方 s-凹函数,则不等式(7)中的不等号反向.

进一步地,令 $p_1=p_2=\cdots=p_n$,则有

推论 设 $f(x)$ 为 $I\subseteq\mathbf{R}^+$ 上的平方 s-凸函数,则 $\forall x_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$,有

$$f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i^2}\right)\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^s}(f(x_i))^2}.\quad(8)$$

若 $f(x)$ 为 $I\subseteq\mathbf{R}^+$ 上的平方 s-凹函数,则不等式(8)中的不等号反向.

3 平方 s-凸函数的一个 Hermite-Hadamard 型不等式

定理 8 设 $[a,b]\subseteq\mathbf{R}^+$,$s\in(0,1]$,$f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的平方 s-凸函数,则

$$2^{s-1}\left[f\left(\sqrt{(a^2+b^2)/2}\right)\right]^2\leqslant\frac{2}{b^2-a^2}\int_a^b x(f(x))^2dx\leqslant\frac{(f(a))^2+(f(b))^2}{s+1}.\quad(9)$$

若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的平方 s-凹函数,则不等式(9)中的不等号反向.

为证明定理 8,先给出 s-凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式:

引理[9] 设 $[a,b]\subseteq\mathbf{R}^+$,$s\in(0,1]$,$f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的 s-凸(凹)函数,则

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant(\geqslant)\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leqslant(\geqslant)\ \frac{f(a)+f(b)}{s+1}.\quad(10)$$

证明 因为 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的平方 s-凸函数,所以由定理 1 知 $g(x)=[f(x^{1/2})]^2$ 是 $[a^2,b^2]$ 上的 s-凸函数,因此有 $g(x)$ 在 $[a^2,b^2]$ 上的 Hermite-Hadamard 型不等式:

$$2^{s-1}g\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2}g(x)\,dx\leqslant\frac{g(a^2)+g(b^2)}{s+1},$$

即

$$2^{s-1}\left[f\left(\sqrt{(a^2+b^2)/2}\right)\right]^2\leqslant\frac{1}{b^2-a^2}\int_{a^2}^{b^2}(f(\sqrt{x}))^2dx\leqslant\frac{(f(a))^2+(f(b))^2}{s+1}$$

$$\Rightarrow 2^{s-1}\left[f\left(\sqrt{(a^2+b^2)/2}\right)\right]^2\leqslant\frac{2}{b^2-a^2}\int_a^b x(f(x))^2dx\leqslant\frac{(f(a))^2+(f(b))^2}{s+1}.$$

若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的平方 s-凹函数,则证明中的不等号反向,故定理的后半部分得证.

注:当 $s=1$ 时,不等式(9)即为 $\left[f\left(\sqrt{(a^2+b^2)/2}\right)\right]^2\leqslant\frac{2}{b^2-a^2}\int_a^b x(f(x))^2dx\leqslant\frac{1}{2}((f(a))^2+(f(b))^2)$,这就是文献[10]定理 1 的结果.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参 考 文 献

[1] 杨露. 关于几何凸函数的不等式[J]. 河北大学学报: 自然科学版,2002,22(2):325 - 328.
[2] 吴善和. 调和凸函数与琴生型不等式[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版,2004,27(4):382 - 386.
[3] 吴善和. 平方凸函数与琴生型不等式[J]. 首都师范大学学报: 自然科学版,2005,26(1):16 - 21.
[4] 宋振云,陈少元. 调和平方凸函数及其 Jensen 型不等式[J]. 首都师范大学学报: 自然科学版,2015,36(3):7 - 14.
[5] 席博彦,包图雅. 关于 r-平均凸函数的一些性质[J]. 数学的实践与认识,2008,38(12):113 - 119.
[6] Godunova E K, Levin V I. Neravenstva dlja funkcii ŝirokogo klassa ,soderžaŝčego vypuklye,monotonnye I nekotorye drugie vidy funkcii,in: Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov,MGPI,Moskva,1985: 138 - 142.
[7] Hudzik H, Maligranda. L. Some remarks on s-convex functions[J]. Aequationes Mat,1994,48: 100 - 111.
[8] 匡继昌. 常用不等式(第四版)[M]. 济南: 山东科学技术出版社,2010: 53 - 63.
[9] Kirmaci U S,et al. Hadamard-type inequalities for s-convex functions[J]. Appl. Math. Comp,2007,193: 26 - 35.
[10] 邓勇平,吴善和. Hadamard 型不等式的若干通过[J]. 贵州师范大学学报: 自然科学版,2007,25(1):63 - 67.

Square s-Convex Function and Its Properties

Song Zhenyun

(Mechanical and Electrical Engineering School, Hubei Polytechnic Institute, Xiaogan Hubei 432000)

Abstract

Based on the studying of convex function and Godunova-Levin function, the author analyzes the logical evolution process from convex function to s-convex function as to the issue of convex function extension, brings forward the concept of square s-convex function by scientific analogy method, discusses its several judgment theorems and operation properties, and sets up its Jensen-type inequality and Hadamard inequality.

Key words: s-convex function, square s-convex function, judgment theorem, operation property, Jensen-type inequality.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net