DOI:10.19789/j.1004-9398.2023.03.003
文献引用:王婕,王秀莲. Heston投资模型下的非零和随机微分博弈问题[J].首都师范大学学报(自然科学版),2023,44(3):12-22. WANG J, WANG X L. Non-zero-sum stochastic differential game under the Heston investment model[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2023,44(3):12-22.

Heston投资模型下的非零和随机微分博弈问题*

王　婕，王秀莲**
(天津师范大学数学科学学院，天津　300387)

摘要:针对竞争保险公司之间的非零和随机微分博弈问题,本文假设保险公司在购买比例再保险的同时可投资于一个无风险资产和一个具有Heston随机波动率的风险资产。以2家保险公司终端财富相对差值绩效最大化为目标,通过博弈理论和动态规划原理分别得到该博弈在决策者是模糊厌恶和模糊中性2种情形下的纳什均衡再保险投资策略。最后给出一个数值算例阐述参数对纳什均衡策略的影响。

关键词:Heston过程;非零和博弈;模糊厌恶;再保险投资策略
中图分类号:O211.67　　**文献标识码**:A

Non-zero-sum stochastic differential game under the Heston investment model*

WANG Jie，WANG Xiulian**
(School of Mathematical Science，Tianjin Normal University，Tianjin　300387)

Abstract: This paper studies the non-zero-sum stochastic differential game between two competing insurance companies. Assume that insurance company can purchase proportional reinsurance and simultaneously invest in a risk-free asset and a risky asset with Heston random volatility in the financial market. Taking the performance maximization of the relative difference of the terminal wealth of two insurance companies as the objective, through the game theory and dynamic programming principle, the Nash equilibrium reinsurance and investment strategies are obtained respectively when the decision makers are ambiguity-averse and ambiguity-neutral. Finally, a numerical example is given to illustrate the influence of parameters on optimal strategy.

Keywords: Heston process; non-zero-sum game; ambiguity-averse; reinsurance-investment strategy
CLC: O211.67　　**DC**: A

0　引　言

在实际中,保险行业发展形势一片大好的背后,保险公司之间往往存在着异常激烈的竞争,竞争对手的战略布局无疑会影响自身的决策和反应。同时,随着新型冠状病毒肺炎疫情在全球的蔓延,保险公司也在遭受着来自外部市场环境不确定性的考验。因此在研究保险公司的最优投资策略选

收稿日期:2022-03-11
* 国家自然科学基金项目(11401436);天津市教育委员会科研基金项目(JW1714)
** 通信作者:jessiewangya@163.com

择问题时,从竞争对手和市场环境2个角度同时考虑才更符合实际,该问题就属于随机微分博弈问题。

保险精算领域中的随机微分博弈问题大多研究在不同的目标函数和模型准则下考虑2家保险公司之间的零和博弈或非零和博弈,并找到相关的纳什均衡策略。如:Sid[1]研究了带有单一支付函数的投资者之间的零和博弈;罗琰和杨招军[2]研究了基于保险公司与市场二者之间的最优投资及再保险零和博弈;Taksar和Zeng[3]研究了保险公司购买非比例再保险情况下的零和博弈;Bensoussan等[4]开辟了非零和博弈的先河,构建了一种状态转移跳扩散模型下的再保险与投资博弈;Zhang等[5]进一步研究了在非零和博弈框架下保险公司的注资问题;Meng等[6]研究了非线性风险下具有再保险业务的非零和博弈;Campi和Santis[7]运用拟变分不等式研究了具有脉冲控制和可随时停止的非零和博弈。

在实际中,保险公司的决策者大多是模糊厌恶者,即对于模型不确定性持反对态度。目前通常采用Girsanov变换,引入一族概率测度来研究模型不确定性,如:Cairns[8]讨论了一种将参数不确定性与模型不确定性结合在一起的方法,结果表明加入不确定性对结果有很大的贡献;刘兵和周明[9]在金融市场存在模糊性的情况下,研究了保险公司的最优投资和最优保费策略;Pun和Wong[10]在博弈问题中,建立了模型不确定性下非零和博弈的一般框架;Wang等[11]在Pun和Wong[10]的基础上,研究了具有违约风险的2个模糊厌恶的保险公司之间的非零和博弈问题。

此外,考虑一般的金融市场,假设股票价格的动态过程遵循Heston随机波动模型,该模型认为股票波动率会随价格变化而变化,并且还考虑了波动率与标的资产价格回报之间的相关性。在此模型下:杨璐等[12]研究了带有期权的资产负债管理模型;Deng等[13]研究了具有违约风险的再保险与投资非零和博弈问题。

以上研究表明现阶段有关模型不确定性下的非零和博弈问题还处于发展阶段,而在Heston投资模型下的研究更是少有,因此,本文基于Wang等[11]和Deng等[13]的研究结果,研究在Heston随机波动模型下,模糊厌恶型保险公司之间的非零和随机微分博弈问题。

1　模型的建立

设$(\Omega, F_t, \mathbb{P})$为一个满足通常条件的完备概率空间,$\{F_t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$代表到$t$时刻所获取的市场信息总和,$\mathbb{P}$为完备的概率测度。假定股票和债券在有限时间区间$[0, T]$内是可交易的,$T$指最终交易时间,并且允许连续交易,交易不涉及交易成本及税收,所有资产都是无限可分的。

假设第k家保险公司的盈余过程为

$$U_k(t) = x_k + d_k t - \tilde{C}_k(t), k = 1, 2, \tag{1}$$

式中:$x_k \in \mathbf{R}$表示初始盈余,d_k表示保费率,$\tilde{C}_k(t)$表示到t时刻为止的累计索赔。假设

$$\tilde{C}_k(t) = \sum_{i=1}^{N(t)+N_k(t)} X_{i,k}, k = 1, 2。 \tag{2}$$

对于$k = 1, 2$,$\sum_{i=1}^{N(t)+N_k(t)} X_{i,k}$是定义在$(\Omega, F_t, \mathbb{P})$上的复合Poisson过程,$\{N(t), t \geqslant 0\}$、$\{N_1(t), t \geqslant 0\}$、$\{N_2(t), t \geqslant 0\}$是相互独立的齐次Poisson过程,强度依次为$\lambda、\lambda_1、\lambda_2 > 0$,分别表示2家保险公司的交叉业务和独立业务到$t$时刻为止的索赔次数。$\{X_{i,k}\}_{i \geqslant 0}$是独立同分布的随机变量,表示第$k$家保险公司第$i$次的索赔额,其分布为$F_k(x)$,一阶原点矩为$\mu_k = E[X_{i,k}]$,二阶原点矩为$\mu_{kk} = E[(X_{i,k})^2]$。

参考Schmidli[14],将索赔过程$\tilde{C}_k(t)$近似为带漂移的布朗运动,满足

$$\mathrm{d}C_k(t) = n_k \mathrm{d}t - \sigma_k \mathrm{d}B_k(t), k = 1, 2, \tag{3}$$

式中:$n_k = (\lambda + \lambda_k)\mu_k > 0, \sigma_k = \sqrt{(\lambda + \lambda_k)\mu_{kk}} > 0$,$\{B_k(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$为$(\Omega, F_t, \mathbb{P})$下的标准布朗运动,且$B_1(t)、B_2(t)$存在相关性,相关系数为$\rho \in [-1, 1]$,即$\mathrm{cov}(B_1(t), B_2(t)) = \rho t$。

对保险公司来说,通过再保险可以有限分散巨额索赔风险,假设2家保险公司同时购买比例再保险以降低风险。设$q_k(t) \in [0, 1], k = 1, 2$,表示第$k$家保险公司在$t$时刻购买比例再保险后的风险自留比例,$Q_k \triangleq \{q_k(t) \mid 0 < q_k < 1\}, k = 1, 2$,表示第$k$家保险公司再保险策略集合。对于$k = 1, 2$,第$k$家保险公司购买再保险后的盈余过程$U_k^{q_k}(t)$可表示为

$$\mathrm{d}U_k^{q_k}(t) = \big(d_k - \delta(q_k)\big)\mathrm{d}t - q_k(t)\mathrm{d}C_k(t), \tag{4}$$

式中:$\delta(q_k)$表示第k家保险公司的再保费率,假设按期望保费原则计算再保费,则有

$$\delta(q_k) = (1 + \eta_k)(1 - q_k)\mu_k, \tag{5}$$

$\eta_k > 0$表示第k家保险公司再保险的安全负荷,将式(3)代入式(4)得

$$\mathrm{d}U_k^{q_k}(t) = \left(d_k - \delta(q_k) - q_k n_k\right)\mathrm{d}t + q_k\sigma_k \mathrm{d}B_k(t), \quad (6)$$

且$U_k^{q_k}(0) = x_k$。

不失一般性,假设保险公司可以同时投资于1个无风险市场(债券)和1个有风险市场(股票),设无风险市场的价格过程为

$$\mathrm{d}S_0(t) = rS_0(t)\mathrm{d}t, \quad (7)$$

式中:$S_0(0) = s_0 > 0$,$r > 0$为无风险利率。有风险市场(股票)的价格过程由Heston随机波动率模型来刻画,这一模型将股票价格的波动率描述为一个由长期均值、均值回归速度和方差波动率(即波动率的波动率)控制的随机过程。这样可对波动率的变化进行动态刻画,从而使股票的价格过程更加贴近真实市场。价格过程为

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t) = S(t)\left[\left(r + \alpha L(t)\right)\mathrm{d}t + \sqrt{L(t)}\,\mathrm{d}W_1(t)\right],\\ \mathrm{d}L(t) = \kappa\left(\beta - L(t)\right)\mathrm{d}t + \upsilon\sqrt{L(t)}\,\mathrm{d}W_2(t),\end{cases} \quad (8)$$

式中:$L(t)$是一个随机过程,表示股票价格波动的方差,且满足$L(0) = l > 0$、$S(0) = s > 0$;α、κ、β、υ为正常数,分别代表波动率均值、均值回归速度、长期均值和股票方差波动率。参考Cox等[15]的研究,这里假设$2\kappa\beta > \upsilon^2$以保证$L(t)$是严格的正数。此外,$W_1(t)$、$W_2(t)$为$(\Omega, F_t, \mathbb{P})$下的标准布朗运动,且$\mathrm{cov}\left(W_1(t), W_2(t)\right) = \hat{\rho}t$,$\hat{\rho} \in [-1, 1]$代表股票价格和股票方差之间的相关系数。

假设第k家保险公司在t时刻投资在风险市场上的资金量$\theta_k(t)$,$\Theta_k \triangleq \left\{\theta_k(t)\right\}$表示第$k$家保险公司投资策略的集合,$k = 1, 2$。记$\pi_k(t) \triangleq \left(q_k(t), \theta_k(t)\right)$为第$k$家保险公司选择的交易策略,因此,保险公司在$t$时刻基于交易策略$\pi_k$下的盈余过程$Z_k^{\pi_k}(t)$为

$$\mathrm{d}Z_k^{\pi_k}(t) = \theta_k(t)\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} + \left(Z_k^{\pi_k}(t) - \theta_k(t)\right)\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)} + \mathrm{d}U_k^{q_k}(t) =$$
$$\left[rZ_k^{\pi_k}(t) + d_k - \delta(q_k) - q_k n_k + \theta_k\alpha L(t)\right]\mathrm{d}t + \theta_k\sqrt{L(t)}\,\mathrm{d}W_1(t) + q_k\sigma_k\mathrm{d}B_k(t), \quad (9)$$

式中:$Z_k^{\pi_k}(0) = x_k$;$k = 1, 2$。

定义 1.1 对于$t \in [0, T]$,第k家保险公司的交易策略$\pi_k(t) = \left(q_k(t), \theta_k(t)\right)$,$k = 1, 2$称为可行策略,如果满足:

(1)$(q_k(t), \theta_k(t))$为F_t循序可测的,且$\forall t \in [0, T]$;

(2)$E_{t, z_k, l}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T\left[q_k^2(t) + \theta_k^2(t)\right]\mathrm{d}t\right] < +\infty$,这里$E_{t, z_k, l}^{\mathbb{P}}[\cdot] = E^{\mathbb{P}}[\cdot | Z_k^{\pi_k}(t) = z_k, L(t) = l]$;

(3)随机微分方程(9)有唯一强解。

所有可行策略的集合用Π_k表示,$k = 1, 2$。

上述模型建立在概率测度$\mathbb{P}$下进行,实际情况中,保险公司对概率测度$\mathbb{P}$具有模糊厌恶态度。保险公司只将$\mathbb{P}$作为参考测度,希望考虑一组可选的概率测度,定义了一类等价于$\mathbb{P}$的概率测度作为替代测度$Q := \left\{\mathbb{Q} \mid \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}\right\}$。

构造$\mathbb{Q}_k \in Q$如下:设$\phi_k(t) := \left(\phi_{k,1}(t), \phi_{k,2}(t), \phi_{k,3}(t)\right)$,$k = 1, 2$,为一组$\left\{F_t\right\}_{t \in [0, T]}$适应过程,满足:

(1)$\phi_{k,1}(t), \phi_{k,2}(t), \phi_{k,3}(t)$为$[0, T]$上$F_t$循序可测函数;

(2)$\phi_{k,1}(t), \phi_{k,2}(t), \phi_{k,3}(t) > 0$,对$(t, w) \in [0, T] \times \Omega$几乎处处成立;

(3)$\phi_{k,1}(t), \phi_{k,2}(t), \phi_{k,3}(t)$满足Novikov条件$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\phi_{k,1}^2(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T\phi_{k,2}^2(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T\phi_{k,3}^2(t)\mathrm{d}t\right\} < \infty$。

记满足以上条件的过程$\left\{\phi_k(t), 0 \leqslant t \leqslant T\right\}$,$k = 1, 2$,构成的集合为$\Phi$。

由Girsanov定理[16],$\forall \mathbb{Q}_k \in Q$,都存在与之对应的$\phi_k(t)$使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_k}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{F_t} = \Lambda^{\phi_k(t)} = \exp\left\{-\int_0^t\phi_{k,1}(s)\mathrm{d}W_1(s) - \frac{1}{2}\int_0^t\phi_{k,1}^2(s)\mathrm{d}s - \int_0^t\phi_{k,2}(s)\mathrm{d}B_k(s) - \frac{1}{2}\int_0^t\phi_{k,2}^2(s)\mathrm{d}s - \int_0^t\phi_{k,3}(s)\mathrm{d}W_2(s) - \frac{1}{2}\int_0^t\phi_{k,3}^2(s)\mathrm{d}s\right\},$$
$$k = 1, 2,$$

在概率测度$\mathbb{Q}_k$下,$W_1^{\mathbb{Q}}(t)$、$B_k^{\mathbb{Q}}(t)$、$W_2^{\mathbb{Q}}(t)$均为标准布朗运动,应满足:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W_1^{\mathbb{Q}}(t) &= \mathrm{d}W_1(t) + \phi_{k,1}(t)\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}B_k^{\mathbb{Q}}(t) &= \mathrm{d}B_k(t) + \phi_{k,2}(t)\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}W_2^{\mathbb{Q}}(t) &= \mathrm{d}W_2(t) + \phi_{k,3}(t)\mathrm{d}t,\end{aligned} \quad (10)$$

式中:$k = 1, 2$;$B_1^{\mathbb{Q}}(t)$、$B_2^{\mathbb{Q}}(t)$、$W_1^{\mathbb{Q}}(t)$、$W_2^{\mathbb{Q}}(t)$相互独立,$W_1^{\mathbb{Q}}(t)$、$W_2^{\mathbb{Q}}(t)$依旧具有一定相关性,满足$\mathrm{cov}\left(W_1^{\mathbb{Q}}(t), W_2^{\mathbb{Q}}(t)\right) = \hat{\rho}t$,$\hat{\rho} \in [-1, 1]$。

记 $KL(\mathbb{P}\|\mathbb{Q}_k)=E^{\mathbb{Q}_k}[\ln\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_k}{\mathrm{d}\mathbb{P}}]\geqslant 0$ 为相对熵函数,表示对测度 $\mathbb{P}$ 的惩罚,则

$$\mathrm{d}KL(\mathbb{P}\|\mathbb{Q}_k)=\frac{1}{2}\phi_{k,1}^2(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\phi_{k,2}^2(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\phi_{k,3}^2(t)\mathrm{d}t,k=1,2。$$

在概率测度 $\mathbb{Q}_k$ 下,第 k 家保险公司的盈余过程式(9)可重新表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Z_k^{\pi_k}(t)=&\Big[rZ_k^{\pi_k}(t)+d_k-\delta(q_k)-q_k\big(n_k+\sigma_k\phi_{k,2}(t)\big)+\\&\theta_k\big(\alpha L(t)-\sqrt{L(t)}\,\phi_{k,1}(t)\big)\Big]\mathrm{d}t+\\&\theta_k\sqrt{L(t)}\,\mathrm{d}W_1^{\mathbb{Q}}(t)+q_k\sigma_k\mathrm{d}B_k^{\mathbb{Q}}(t),\ k=1,2。\end{aligned}\tag{11}$$

引入模型模糊后,只改变了盈余过程的漂移项,并没有改变方差项。同样地,股票的价格过程可重新表示为

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=S(t)\Big[(r+\alpha L(t)-\sqrt{L(t)}\,\phi_{k,1}(t))\mathrm{d}t+\\\sqrt{L(t)}\,\mathrm{d}W_1^{\mathbb{Q}}(t)\Big],\quad k=1,2,\\\mathrm{d}L(t)=\Big[\kappa(\beta-L(t))-\upsilon\sqrt{L(t)}\,\phi_{k,3}(t)\Big]\mathrm{d}t+\\\upsilon\sqrt{L(t)}\,\mathrm{d}W_2^{\mathbb{Q}}(t),\quad k=1,2。\end{cases}\tag{12}$$

2　值函数的提出

2家保险公司都选择可允许的再保险和投资策略,以实现自身终端财富的最大化。每一家保险公司都关心自己和对方的终极财富之间的差异,并试图比竞争对手表现得更好。类似于Bensoussan等[4]、Espinosa和Touzi[17]的研究,本文将此优化问题表述为2家竞争保险公司之间的非零和随机微分博弈,即第 k 家保险公司的目标是在终端时刻 $T\in(0,\infty)$ 之前相对绩效 $\hat{Z}_k^{\pi_k,\pi_m}(t):=Z_k^{\pi_k}(t)-\omega_k Z_m^{\pi_m}(t)$ 的期望效用最大化,式中:$k,m=1,2$且$k\neq m$;$\omega_k\in[0,1]$为第 k 家保险公司对于竞争者绩效的敏感度,ω_k越大,表示越关心自身和对方财富之间的差异。

定义终值财富的条件期望效用为

$$\bar{J}_k^{\pi_k,\pi_m}(t,\hat{z}_k,l)=E_{\mathbb{P}}\Big[U_k(\hat{Z}_k^{\pi_k,\pi_m}(T))\Big|\hat{Z}_k^{\pi_k,\pi_m}(t)=\hat{z}_k,L(t)=l\Big],\tag{13}$$

式中:$U_k(\hat{z}_k)=-\frac{1}{\gamma_k}\exp(-\gamma_k\hat{z}_k)$为指数效用函数,满足 $U_k'(\hat{z}_k)>0,U_k''(\hat{z}_k)<0,\gamma_k>0$ 为绝对风险厌恶系数;$k,m=1,2$且$k\neq m$。

考虑加入模糊厌恶的情况,即保险公司不信任参考测度 $\mathbb{P}$ 的准确性,而是在 Q 中选择了与之等价的概率测度 $Q_k,k=1,2$,此时就会有罚金产生。换句话说,保险公司的目标变为在参考测度"最坏"的情况下(即罚金最小),考虑终端时刻 T 之前相对绩效的期望效用最大化。

定义终值财富在概率测度 Q_k 下的条件期望效用,式(13)转换为

$$\begin{aligned}J_k^{\pi_k,\pi_m}(t,\hat{z}_k,l)=&\inf_{Q_k\in Q}E_{Q_k}\Big[U_k(\hat{Z}_k^{\pi_k,\pi_m}(T))+\\&P_k(\mathbb{P}\|Q_k)\,\Big|\,\hat{Z}_k^{\pi_k,\pi_m}(t)=\hat{z}_k,L(t)=l\Big],\end{aligned}\tag{14}$$

式中:$P_k(\mathbb{P}\|Q_k)$是与$J_k^{\pi_k,\pi_m}(t,\hat{z},l)$同样数量级的罚函数;$k,m=1,2$且$k\neq m$。

2家竞争保险公司之间的非零和随机微分博弈问题式(14),即为寻找一对纳什均衡策略 $(\pi_1^*,\pi_2^*)\in\Pi_1\times\Pi_2$。

定义 2.1　若对于 $\forall(\pi_1,\pi_2)\in\Pi_1\times\Pi_2$,下列不等式均满足,则称一对可允许的策略$(\pi_1^*,\pi_2^*)\in\Pi_1\times\Pi_2$为纳什均衡策略,即

$$\begin{cases}J_1^{\pi_1,\pi_2^*}(t,\hat{z}_1,l)\leqslant J_1^{\pi_1^*,\pi_2^*}(t,\hat{z}_1,l),\\J_2^{\pi_1^*,\pi_2}(t,\hat{z}_2,l)\leqslant J_2^{\pi_1^*,\pi_2^*}(t,\hat{z}_2,l)。\end{cases}\tag{15}$$

如果式(15)成立,则2家保险公司的值函数为

$$\begin{cases}J^1(t,\hat{z}_1,l)=J_1^{\pi_1^*,\pi_2^*}(t,\hat{z}_1,l)=\\\sup\limits_{\pi_1\in\Pi_1}\inf\limits_{Q_1\in Q}E_{Q_1}\Big[U_1(\hat{Z}_1^{\pi_1,\pi_2^*}(T))+P_1(\mathbb{P}\|Q_1)\Big],\\J^2(t,\hat{z}_2,l)=J_2^{\pi_1^*,\pi_2^*}(t,\hat{z}_2,l)=\\\sup\limits_{\pi_2\in\Pi_2}\inf\limits_{Q_2\in Q}E_{Q_2}\Big[U_2(\hat{Z}_2^{\pi_1^*,\pi_2}(T))+P_2(\mathbb{P}\|Q_2)\Big],\end{cases}\tag{16}$$

参考Maenhout[18],定义罚函数

$$P_k(\mathbb{P}\|Q_k)=-\frac{\gamma_k\phi_{k,1}^2(t)J^k(t,\hat{z}_k,l)}{2\beta_{k,1}}-\frac{\gamma_k\phi_{k,2}^2(t)J^k(t,\hat{z}_k,l)}{2\beta_{k,2}}-\frac{\gamma_k\phi_{k,3}^2(t)J^k(t,\hat{z}_k,l)}{2\beta_{k,3}},\tag{17}$$

式中:$\beta_{k,i}>0;k=1,2;i=1,2,3$,为第 k 家保险公司的模糊厌恶系数,描述了其对扩散风险的模糊厌恶程度;当$\beta_{k,i}=0$时,保险公司对这类风险是模糊中性的。

相对绩效 $\hat{Z}_k^{\pi_k,\pi_m}(t)$ 在概率测度 Q_k 下定义为

$$\mathrm{d}\hat{Z}_k^{\pi_k,\pi_m}(t)=\mathrm{d}\big(Z_k^{\pi_k}(t)-\omega_k Z_m^{\pi_m}(t)\big)=$$

$$\Big[r\hat{Z}_k(t)+d_k-\omega_k d_m-\big(\delta(q_k)-\omega_k\delta(q_m)\big)-(q_k n_k-\omega_k q_m n_m)+(\theta_k-\omega_k\theta_m)\alpha L(t)-\theta_k\sqrt{L(t)}\,\phi_{k,1}+\omega_k\theta_m\sqrt{L(t)}\,\phi_{m,1}-q_k\sigma_k\phi_{k,2}+\omega_k\sigma_m q_m\phi_{m,2}\Big]\mathrm{d}t+\theta_k\sqrt{L(t)}\,\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}_{k,1}(t)-\omega_k\theta_m\sqrt{L(t)}\,\mathrm{d}W^{Q}_{m,1}(t)+q_k\sigma_k\mathrm{d}B^{Q}_{k}(t)-\omega_k\sigma_m q_m\mathrm{d}B^{Q}_{m}(t),\tag{18}$$

式中:$k,m=1,2$且$k\neq m$;$\hat{Z}_k(0)=\hat{z}_k=x_k-\omega_k x_m$。

定义算子,其中$k,m=1,2$且$k\neq m$:

$$A^{\pi_k,\pi_m,\phi_k,\phi_m}J^k(t,\hat{z}_k,l)=J_t+\Big[r\hat{Z}_k(t)+d_k-\omega_k d_m-\big(\delta(q_k)-\omega_k\delta(q_m)\big)-(q_k n_k-\omega_k q_m n_m)+(\theta_k-\omega_k\theta_m)\alpha L(t)-\theta_k\sqrt{L(t)}\,\phi_{k,1}+\omega_k\theta_m\sqrt{L(t)}\,\phi_{m,1}-q_k\sigma_k\phi_{k,2}+\omega_k\sigma_m q_m\phi_{m,2}\Big]J_{\hat{z}}+\frac{1}{2}\Big[(\theta_k-\omega_k\theta_m)^2L(t)+{q_k}^2{\sigma_k}^2+\omega_k^2\sigma_m^2q_m^2-2\rho q_k\sigma_k\omega_k\sigma_m q_m\Big]J_{\hat{z}\hat{z}}+\Big[\kappa\big(\beta-L(t)\big)-\upsilon\sqrt{L(t)}\,\phi_{k,3}(t)\Big]J_l+\frac{1}{2}\upsilon^2L(t)J_{ll}+\hat{\rho}\upsilon L(t)(\theta_k-\omega_k\theta_m)J_{\hat{z}l}。\tag{19}$$

根据动态规划原理[19],如果值函数$J^k(t,\hat{z}_k,l)\in C^{1,2,2}([0,T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}),k=1,2$,且纳什均衡策略解$(\pi_1^*,\pi_2^*)\in\Pi_1\times\Pi_2$存在,则2家保险公司值函数分别满足Hamilton-Jacobi-Bellman(简称为HJB)方程

$$\begin{cases}\sup\limits_{\pi_1\in\Pi_1}\inf\limits_{Q_1\in Q}\mathrm{E}_{Q_1}\Big[A^{\pi_1,\pi_2^*,\phi_1,\phi_2^*}J^1(t,\hat{z}_1,l)+P_1(\mathbb{P}\big\|Q_1)\Big]=0,\\ \sup\limits_{\pi_2\in\Pi_2}\inf\limits_{Q_2\in Q}\mathrm{E}_{Q_2}\Big[A^{\pi_1^*,\pi_2,\phi_1^*,\phi_2}J^2(t,\hat{z}_2,l)+P_2(\mathbb{P}\big\|Q_2)\Big]=0,\end{cases}\tag{20}$$

且满足边值条件

$$J^1(T,\hat{z}_1,l)=U_1(\hat{z}_1),J^2(T,\hat{z}_2,l)=U_2(\hat{z}_2)。\tag{21}$$

3 纳什均衡策略

3.1 保险公司是模糊厌恶者

引理3.1.1 Riccati方程$A_k'(t)+h_k(t)A_k^2(t)+g_k(t)A_k(t)+f_k(t)=0,m\neq k\in\{1,2\}$,

式中:$h_k(t)=\frac{1}{2}v^2(1+\frac{\beta_{k,3}}{\gamma_k})-\frac{\gamma_k\hat{\rho}^2v^2}{2(\gamma_k+\beta_{k,1})}$,$g_k(t)=\frac{\gamma_k\hat{\rho}v(\beta_{k,1}\omega_k\theta_m^*\mathrm{e}^{r(T-t)}-\alpha)}{\gamma_k+\beta_{k,1}}-\kappa$,

$$f_k(t)=\frac{\omega_k\theta_m^*\gamma_k\mathrm{e}^{r(T-t)}\beta_{k,1}(2\alpha+\omega_k\theta_m^*\gamma_k\mathrm{e}^{r(T-t)})-\gamma_k\alpha^2}{2(\gamma_k+\beta_{k,1})},$$

$$x_{1,2}=\frac{-g_k(t)\pm\sqrt{g_k^2(t)-4h_k(t)f_k(t)}}{2h_k(t)},$$

$A_k(T)=0$,则$A_k(t)$的解为

$$\begin{cases}A_k(t)=\dfrac{x_1x_2-x_1x_2\mathrm{e}^{-h_k(x_1-x_2)(T-t)}}{x_2-x_1\mathrm{e}^{-h_k(x_1-x_2)(T-t)}},\\ \hat{\rho}^2\neq\dfrac{(\gamma_k+\beta_{k,1})(\gamma_k+\beta_{k,3})}{\gamma_k^2},k=1,2,\\ A_k(t)=\Big(\int-f_k(t)\mathrm{e}^{\int g_k(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\Big)\mathrm{e}^{-\int g_k(t)\mathrm{d}t},\\ \hat{\rho}^2=\dfrac{(\gamma_k+\beta_{k,1})(\gamma_k+\beta_{k,3})}{\gamma_k^2},k=1,2。\end{cases}\tag{22}$$

证明 参考Zhao等[20]的研究,$A_k(t)$的解可分为2种情况:

当$\hat{\rho}^2\neq\frac{(\gamma_k+\beta_{k,1})(\gamma_k+\beta_{k,3})}{\gamma_k^2}$时,首先求解二次方程$h_k(t)A^2(t)+g_k(t)A(t)+f_k(t)=0$,得到解$x_{1,2}$,原方程可重新表示为

$$\frac{1}{h_k(t)(x_1-x_2)}\int\left(\frac{1}{A_k(t)-x_1}-\frac{1}{A_k(t)-x_2}\right)\mathrm{d}A_k(t)=t+C,$$

利用终值条件$A_k(T)=0$,得到$A_k(t)=\frac{x_1x_2-x_1x_2\mathrm{e}^{-h_k(x_1-x_2)(T-t)}}{x_2-x_1\mathrm{e}^{-h_k(x_1-x_2)(T-t)}},k=1,2$;

当$\hat{\rho}^2=\frac{(\gamma_k+\beta_{k,1})(\gamma_k+\beta_{k,3})}{\gamma_k^2}$时,即求解常微分方程$A_k'(t)+g_k(t)A_k(t)+f_k(t)=0$,利用终值条件$A_k(T)=0$,得到$A_k(t)=\Big(\int-f_k(t)\mathrm{e}^{\int g_k(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\Big)\mathrm{e}^{-\int g_k(t)\mathrm{d}t}$,$k=1,2$。

定理3.1.1 针对非零和随机微分博弈问题(15),对于$\forall t\in[0,T],k,m=1,2,k\neq m$,纳什均衡策略$\pi_k^*(t)=\big(q_k^*(t),\theta_k^*(t)\big)\in\Pi_k$如下:

纳什均衡投资策略$\theta_k^*(t)$为

$$\begin{cases}\theta_1^*(t)=\dfrac{\hat{\theta}_1(t)+a_1\hat{\theta}_2(t)}{1-a_1a_2},\\ \theta_2^*(t)=\dfrac{\hat{\theta}_2(t)+a_2\hat{\theta}_1(t)}{1-a_1a_2},\end{cases}\tag{23}$$

式中:$\hat{\theta}_k(t)=\frac{\alpha+\hat{\rho}\upsilon A_k(t)}{e^{r(T-t)}(\gamma_k+\beta_{k,1})}$,$a_k=\frac{\omega_k\gamma_k}{\gamma_k+\beta_{k,1}}$,$A_k(t)$由式(22)给出。

定义$\tilde{q}_k(t),k=1,2$,

$$\begin{cases}\tilde{q}_1(t)=\dfrac{b_1\hat{q}_2(t)+\hat{q}_1(t)}{1-b_1b_2},\\ \tilde{q}_2(t)=\dfrac{b_2\hat{q}_1(t)+\hat{q}_2(t)}{1-b_1b_2}。\end{cases}\tag{24}$$

纳什均衡再保险策略$q_k^*(t),k=1,2$,有如下4种情形:

情形1:　若$\tilde{q}_1(t)\leqslant 1,\tilde{q}_2(t)\leqslant 1$,则$q_1^*(t)=\tilde{q}_1(t),q_2^*(t)=\tilde{q}_2(t)$;

情形2:　若$\tilde{q}_1(t)\leqslant 1,\tilde{q}_2(t)>1$,则$q_1^*(t)=\tilde{q}_1(t),q_2^*(t)=1$;

情形3:　若$\tilde{q}_1(t)>1,\tilde{q}_2(t)\leqslant 1$,则$q_1^*(t)=1,q_2^*(t)=\tilde{q}_2(t)$;

情形4:　若$\tilde{q}_1(t)>1,\tilde{q}_2(t)>1$,则$q_1^*(t)=1,q_2^*(t)=1$。

式中:$\hat{q}_k(t)=\dfrac{(1+\eta_k)\mu_k-n_k}{\sigma_k^2(\gamma_k+\beta_{k,2})\mathrm{e}^{r(T-t)}},b_k=\dfrac{\rho\omega_k\sigma_m\gamma_k}{\sigma_k(\gamma_k+\beta_{k,2})}$,$k,m=1,2$且$k\neq m$。

证明　首先根据指数效用的函数形式,参考Liang和Yuen[21]、Chen和Yang[22]的研究,猜想值函数的形式为

$$J^k(t,\hat{z}_k,l)=-\frac{1}{\gamma_k}\exp\left\{-\gamma_k\hat{z}_k\mathrm{e}^{r(T-t)}+A_k(t)l+B_k(t)\right\},\quad k=1,2,\tag{25}$$

式中:$A_k(t),B_k(t)$满足边界条件$A_k(T)=B_k(T)=0$,根据式(25)求微分得到

$$\begin{cases}J_t(t,\hat{z}_k,l)=\left[r\gamma_k\hat{z}_k\mathrm{e}^{r(T-t)}+A_k'(t)l+B_k'(t)\right]J^k(t,\hat{z}_k,l),\\ J_{\hat{z}}(t,\hat{z}_k,l)=-\gamma_k\mathrm{e}^{r(T-t)}J^k(t,\hat{z}_k,l),\\ J_{\hat{z}\hat{z}}(t,\hat{z}_k,l)=\gamma_k^2\mathrm{e}^{2r(T-t)}J^k(t,\hat{z}_k,l),\\ J_l(t,\hat{z}_k,l)=A_k(t)J^k(t,\hat{z}_k,l),\\ J_{ll}(t,\hat{z}_k,l)=A_k^2(t,l)J^k(t,\hat{z}_k,l),\\ J_{\hat{z}l}(t,\hat{z}_k,l)=-\gamma_k\mathrm{e}^{r(T-t)}A_k(t)J^k(t,\hat{z}_k,l),\end{cases}\tag{26}$$

将式(17)、(19)和(26)代入式(20)可得

$$\begin{aligned}0=\inf_{\pi_k\in\Pi_k}\sup_{Q_k\in Q}\Big\{&r\gamma_k\hat{z}_k\mathrm{e}^{r(T-t)}+A_k'(t)l+B_k'(t)+\\&\left[r\hat{Z}_k(t)+d_k-\omega_kd_m-(\delta(q_k)-\omega_k\delta(q_m^*))-\right.\\&(q_kn_k-\omega_kq_m^*n_m)+(\theta_k-\omega_k\theta_m^*)\alpha L(t)-\\&\theta_k\sqrt{L(t)}\,\phi_{k,1}+\omega_k\theta_m^*\sqrt{L(t)}\,\phi_{m,1}^*-q_k\sigma_k\phi_{k,2}+\\&\left.\omega_k\sigma_mq_m^*\phi_{m,2}^*\right](-\gamma_k\mathrm{e}^{r(T-t)})+\frac{1}{2}\left[(\theta_k-\omega_k\theta_m^*)^2L(t)+\right.\\&\left.q_k{}^2\sigma_k{}^2+\omega_k^2\sigma_m^2q_m^{2*}-2\rho q_k\sigma_k\omega_k\sigma_mq_m^*\right]\gamma_k^2\mathrm{e}^{2r(T-t)}+\\&\left[\kappa(\beta-L(t))-\upsilon\sqrt{L(t)}\,\phi_{k,3}(t)\right]A_k(t)+\\&\frac{1}{2}\upsilon^2L(t)A_k^2(t)-\hat{\rho}\upsilon L(t)(\theta_k-\\&\left.\omega_k\theta_m^*)\gamma_k\mathrm{e}^{r(T-t)}A_k(t)-\frac{\gamma_k\phi_{k,1}^2}{2\beta_{k,1}}-\frac{\gamma_k\phi_{k,2}^2}{2\beta_{k,2}}-\frac{\gamma_k\phi_{k,3}^2}{2\beta_{k,3}}\right\},\end{aligned}\tag{27}$$

式中$k,m=1,2$且$k\neq m$。根据一阶条件可以得到

$$\begin{cases}\phi_{k,1}^*=\beta_{k,1}\theta_k\sqrt{L(t)}\,\mathrm{e}^{r(T-t)},\\ \phi_{k,2}^*=\beta_{k,2}q_k\sigma_k\mathrm{e}^{r(T-t)},\\ \phi_{k,3}^*=\dfrac{-\upsilon\beta_{k,3}\sqrt{L(t)}\,A_k(t)}{\gamma_k},\end{cases}\tag{28}$$

将式(5)和(28)代入式(27)可得

$$\begin{aligned}0=&r\gamma_k\hat{z}_k\mathrm{e}^{r(T-t)}+A_k'(t)l+B_k'(t)+\left[r\hat{Z}_k(t)+d_k-\right.\\&\omega_kd_m+\omega_k\delta(q_m^*)+\omega_kq_m^*n_m-\omega_k\theta_m^*\alpha L(t)-(1+\eta_k)\mu_k+\\&\left.\omega_k\theta_m^*\sqrt{L(t)}\,\phi_{m,1}^*+\omega_k\sigma_mq_m^*\phi_{m,2}^*\right](-\gamma_k\mathrm{e}^{r(T-t)})+\\&\frac{1}{2}\left[\omega_k^2\theta_m^{*2}L(t)+\omega_k^2\sigma_m^2q_m^{*2}\right]\gamma_k^2\mathrm{e}^{2r(T-t)}+\kappa(\beta-L(t))A_k(t)+\\&\frac{1}{2}\upsilon^2L(t)A_k^2(t)+\hat{\rho}\upsilon L(t)\omega_k\theta_m^*\gamma_k\mathrm{e}^{r(T-t)}A_k(t)+\\&\frac{\upsilon^2\beta_{k,3}L(t)A_k^2(t)}{2\gamma_k}+\inf_{q_k\in Q_k}\left\{\left[(1+\eta_k)\mu_kq_k-q_kn_k\right](-\gamma_k\mathrm{e}^{r(T-t)})+\right.\\&\left.\left(\frac{1}{2}q_k{}^2\sigma_k{}^2-\rho q_k\sigma_k\omega_k\sigma_mq_m^*\right)\gamma_k^2\mathrm{e}^{2r(T-t)}+\frac{1}{2}q_k{}^2\sigma_k{}^2\beta_{k,2}\gamma_k\mathrm{e}^{2r(T-t)}\right\}+\\&\inf_{\theta_k\in\Theta_k}\left\{(-\alpha-\hat{\rho}\upsilon A_k(t))L(t)\theta_k\gamma_k\mathrm{e}^{r(T-t)}+\right.\\&\left.\left(\frac{1}{2}\theta_k^2-\theta_k\omega_k\theta_m^*\right)L(t)\gamma_k^2\mathrm{e}^{2r(T-t)}+\frac{1}{2}\gamma_k\mathrm{e}^{2r(T-t)}\theta_k^2L(t)\beta_{k,1}\right\},\end{aligned}\tag{29}$$

根据一阶条件,得到纳什均衡投资策略$\theta_k^*(t),k=1,2$为下面耦合系统的解:

$$\begin{cases}\theta_1^*(t)=\dfrac{\alpha+\hat{\rho}\upsilon A_1(t)+\omega_1\gamma_1\mathrm{e}^{r(T-t)}\theta_2^*(t)}{\mathrm{e}^{r(T-t)}(\gamma_1+\beta_{1,1})},\\ \theta_2^*(t)=\dfrac{\alpha+\hat{\rho}\upsilon A_2(t)+\omega_2\gamma_2\mathrm{e}^{r(T-t)}\theta_1^*(t)}{\mathrm{e}^{r(T-t)}(\gamma_2+\beta_{2,1})},\end{cases}\tag{30}$$

经整理可得

$$\begin{cases}\theta_1^*(t)=\dfrac{\hat{\theta}_1(t)+a_1\hat{\theta}_2(t)}{1-a_1a_2},\\ \theta_2^*(t)=\dfrac{\hat{\theta}_2(t)+a_2\hat{\theta}_1(t)}{1-a_1a_2},\end{cases}\tag{31}$$

式中:$\hat{\theta}_k(t)=\dfrac{\alpha+\hat{\rho}\upsilon A_k(t)}{\mathrm{e}^{r(T-t)}(\gamma_k+\beta_{k,1})}$,$a_k=\dfrac{\omega_k\gamma_k}{\gamma_k+\beta_{k,1}}$,$k=1,2$。

根据一阶条件,得到再保险策略$\tilde{q}_k(t), k=1,2$为下面耦合系统的解,即

$$\begin{cases}\tilde{q}_1(t)=\dfrac{(1+\eta_1)\mu_1-n_1+\rho\omega_1\sigma_1\sigma_2\gamma_1 e^{r(T-t)}\tilde{q}_2(t)}{\sigma_1^2(\gamma_1+\beta_{1,2})e^{r(T-t)}},\\ \tilde{q}_2(t)=\dfrac{(1+\eta_2)\mu_2-n_2+\rho\omega_2\sigma_1\sigma_2\gamma_2 e^{r(T-t)}\tilde{q}_1(t)}{\sigma_2^2(\gamma_2+\beta_{2,2})e^{r(T-t)}},\end{cases}\tag{32}$$

经整理可得

$$\begin{cases}\tilde{q}_1(t)=\dfrac{b_1\hat{q}_2(t)+\hat{q}_1(t)}{1-b_1b_2},\\ \tilde{q}_2(t)=\dfrac{b_2\hat{q}_1(t)+\hat{q}_2(t)}{1-b_1b_2},\end{cases}\tag{33}$$

式中:$\hat{q}_k(t)=\dfrac{(1+\eta_k)\mu_k-n_k}{\sigma_k^2(\gamma_k+\beta_{k,2})e^{r(T-t)}}$, $b_k=\dfrac{\rho\omega_k\sigma_m\gamma_k}{\sigma_k(\gamma_k+\beta_{k,2})}$, $k,m=1,2$且$k\neq m$。

纳什均衡再保险策略$q_k^*(t)$与$\tilde{q}_k(t)$很接近,但由于$1\geqslant\rho,\omega_k\geqslant 0、\gamma_k\geqslant 0、\beta_{k,2}\geqslant 0$,则有$1-b_1b_2=1-\dfrac{\rho^2\omega_1\omega_2\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1+\beta_{1,2})(\gamma_2+\beta_{2,2})}\geqslant 0$,因此$\tilde{q}_k(t)\geqslant 0$,又由于纳什均衡再保险策略$q_k^*(t)\in[0,1]$,故需要分情形讨论,如定理3.1.1。

将得到的纳什均衡策略$\pi_k^*(t)=\left(q_k^*(t),\theta_k^*(t)\right)$代入式(29),整理得到

$$\begin{aligned}0=&\Big\{A_k'(t)+\omega_k\theta_m^*\alpha\gamma_k e^{r(T-t)}-\omega_k\theta_m^{2*}\beta_{m,1}\gamma_k e^{2r(T-t)}+\\&\frac{1}{2}\omega_k^2\theta_m^{2*}\gamma_k^2 e^{2r(T-t)}-\kappa A_k(t)+\frac{1}{2}v^2A_k^2(t)\left(1+\frac{\beta_{k,3}}{\gamma_k}\right)+\\&\hat{\rho}v\omega_k\theta_m^*\gamma_k e^{r(T-t)}A_k(t)-\\&\frac{\gamma_k\left[\alpha+\omega_k\theta_m^*\gamma_k e^{r(T-t)}+\hat{\rho}vA_k(t)\right]^2}{2(\gamma_k+\beta_{k,1})}\Big\}l+\\&r\gamma_k\hat{z}_k e^{r(T-t)}+B_k'(t)+\Big[r\hat{Z}_k(t)+d_k-\omega_k d_m+\\&\omega_k\delta(q_m^*)+\omega_k q_m^*n_m-(1+\eta_k)\mu_k+\omega_k\sigma_m q_m^*\phi_{m,2}^*\Big]\cdot\\&(-\gamma_k e^{r(T-t)})+\frac{1}{2}\omega_k^2\sigma_m^2q_m^{2*}\gamma_k^2e^{2r(T-t)}+\kappa\beta A_k(t)-\\&\frac{\left[(1+\eta_k)\mu_k-n_k+\rho\sigma_k\omega_k\sigma_m q_m^*\gamma_k e^{r(T-t)}\right]^2\gamma_k}{2\sigma_k^2(\gamma_k+\beta_{k,2})},\end{aligned}\tag{34}$$

又此方程对所有l均成立,故l的系数为零,整理得到

$$\begin{aligned}0=&A_k'(t)+\left[\frac{1}{2}v^2\left(1+\frac{\beta_{k,3}}{\gamma_k}\right)-\frac{\gamma_k\hat{\rho}^2v^2}{2(\gamma_k+\beta_{k,1})}\right]A_k^2(t)+\\&\left[\frac{\gamma_k\hat{\rho}v(\beta_{k,1}\omega_k\theta_m^*e^{r(T-t)}-\alpha)}{\gamma_k+\beta_{k,1}}-\kappa\right]A_k(t)+\\&\frac{\omega_k\theta_m^*\gamma_k e^{r(T-t)}\beta_{k,1}(2\alpha+\omega_k\theta_m^*\gamma_k e^{r(T-t)})-\gamma_k\alpha^2}{2(\gamma_k+\beta_{k,1})},\end{aligned}\tag{35}$$

可以注意到,上述方程为关于$A_k(t)$的Riccati方程,根据引理1可得到式(22)。

定理3.1.2(验证定理) 如果存在一个函数$\tilde{J}^k(t,\hat{z}_k,l)\in C^{1,2,2}([0,T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})$,一个控制策略$(\pi_k^*,\phi_k^*)\in\Pi_k\times\Phi$,$k,m=1,2$且$k\neq m$,满足:

(1)对于任意$\phi_k\in\Phi$,都有$A^{\pi_k^*,\pi_m^*,\phi_k,\phi_m^*}\tilde{J}^k(t,\hat{z}_k,l)+P_k(\mathbb{P}\|Q_k)\geqslant 0$;

(2)对于任意$\pi_k\in\Pi_k$,都有$A^{\pi_k,\pi_m^*,\phi_k^*,\phi_m^*}\tilde{J}^k(t,\hat{z}_k,l)+P_k(\mathbb{P}\|Q_k)\leqslant 0$;

(3)$A^{\pi_k^*,\pi_m^*,\phi_k^*,\phi_m^*}\tilde{J}^k(t,\hat{z}_k,l)+P_k(\mathbb{P}\|Q_k)=0$;

(4)对于所有$(\pi_k,\phi_k)\in\Pi_k\times\Phi$, $\lim\limits_{t\to T-}\tilde{J}^k(t,\hat{z}_k,l)=U_k\left(\hat{Z}_k^{\pi_k,\pi_m^*}(T)\right)$;

(5)$\left\{\tilde{J}^k\left(\tau,\hat{Z}_k^{\pi_k,\pi_m^*}(\tau),L(\tau)\right)\right\}_{\tau\in T}$, $P_k(\mathbb{P}\|Q_k)$是一致可积的,其中$T\triangleq\{\tau|\tau\leqslant T\}$。

则$\pi_k^*\in\Pi_k$是最优策略,且$\tilde{J}^k(t,\hat{z}_k,l)=J^k(t,\hat{z}_k,l)$是对应的值函数。

证明 证明过程可参考Mataramvura和Øksendal[23]的研究,此处省略。

3.2 保险公司是模糊中性者

定理3.2.1 若第k家保险公司对概率测度$\mathbb{P}$持模糊中性态度,则不存在替代测度$Q_k\in Q$,即$\phi_{k,i}(t)=0,\beta_{k,i}=0,i=1,2,3,k=1,2$。此时,对于$\forall t\in[0,T]$,$k=1,2$,纳什均衡策略$\pi_k^*(t)=\left(q_k^*(t),\theta_k^*(t)\right)\in\Pi_k$如下:

纳什均衡投资策略$\tilde{\theta}_k^*(t)$为

$$\begin{cases}\tilde{\theta}_1^*(t)=\dfrac{\tilde{\theta}_1(t)+\omega_1\tilde{\theta}_2(t)}{1-\omega_1\omega_2},\\ \tilde{\theta}_2^*(t)=\dfrac{\tilde{\theta}_2(t)+\omega_2\tilde{\theta}_1(t)}{1-\omega_1\omega_2},\end{cases}\tag{36}$$

其中$\tilde{\theta}_k(t)=\dfrac{\alpha+\hat{\rho}v\tilde{A}_k(t)}{e^{r(T-t)}\gamma_k}$,且$\tilde{A}_k(t)$的解为

$$\tilde{A}_k(t)=\begin{cases}\dfrac{\tilde{x}_1\tilde{x}_2-\tilde{x}_1\tilde{x}_2\mathrm{e}^{\frac{\upsilon^2(1-\hat{\rho}^2)(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)(T-t)}{2}}}{\tilde{x}_2-\tilde{x}_1\mathrm{e}^{\frac{\upsilon^2(1-\hat{\rho}^2)(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)(T-t)}{2}}},\hat{\rho}\neq\pm1,\\ -\dfrac{\alpha^2}{2(\kappa+\upsilon\alpha)}\left[1-\mathrm{e}^{-(\kappa+\upsilon\alpha)(T-t)}\right],\hat{\rho}=1,\\ -\dfrac{\alpha^2}{2(\kappa-\upsilon\alpha)}\left[1-\mathrm{e}^{-(\kappa-\upsilon\alpha)(T-t)}\right],\hat{\rho}=-1,\kappa\neq\upsilon\alpha,\\ -\dfrac{\alpha^2}{2}(T-t),\hat{\rho}=-1,\kappa=\upsilon\alpha,\end{cases}\tag{37}$$

$$\tilde{x}_{1,2}=\frac{\kappa+\hat{\rho}\upsilon\alpha\pm\sqrt{\kappa^2+2\hat{\rho}\upsilon\alpha\kappa+\upsilon^2\alpha^2}}{\upsilon^2(1-\hat{\rho}^2)}。$$

纳什均衡再保险策略$\tilde{q}_k^*(t)$,有4种情形。

情形1:若$\check{q}_1^*(t)\leqslant1,\check{q}_2^*(t)\leqslant1$,则$\tilde{q}_1^*(t)=\check{q}_1^*(t)$,$\tilde{q}_2^*(t)=\check{q}_2^*(t)$;

情形2:若$\check{q}_1^*(t)\leqslant1,\check{q}_2^*(t)>1$,则$\tilde{q}_1^*(t)=\check{q}_1^*(t)$,$\tilde{q}_2^*(t)=1$;

情形3:若$\check{q}_1^*(t)>1,\check{q}_2^*(t)\leqslant1$,则$\tilde{q}_1^*(t)=1$,$\tilde{q}_2^*(t)=\check{q}_2^*(t)$;

情形4:若$\check{q}_1^*(t)>1,\check{q}_2^*(t)>1$,则$\tilde{q}_1^*(t)=1$,$\tilde{q}_2^*(t)=1$。

式中:$\check{q}_k^*(t)=\dfrac{b_k\check{q}_m(t)+\check{q}_k(t)}{1-\tilde{b}_k\tilde{b}_m}$,$\check{q}_k(t)=\dfrac{(1+\eta_k)\mu_k-n_k}{\sigma_k^2\gamma_k e^{r(T-t)}}$,

$\tilde{b}_k=\dfrac{\rho\omega_k\sigma_m}{\sigma_k}$,$k,m=1,2$且$k\neq m$。

注1　对于保险公司持模糊中性态度时得出的纳什均衡策略与Deng等[13]中定理4.1结果相一致。证明过程与本文定理3.1.1类似,在此省略。

4　数值算例

为了分析模型参数对纳什均衡再保险投资策略的影响,进行如下的数值模拟,其中参数取值参考Wang等[11]和Deng等[13]的研究,具体如表1和表2所示。

表1　公共参数的取值

公共参数	符号	取值
时刻	t	0
最终交易时间	T	5
无风险利率	r	0.05
相关系数	ρ	0.5
相关系数	$\hat{\rho}$	0.5
波动率均值	α	2
均值回归速度	κ	3
股票方差波动率	υ	1
长期均值	β	0.18

情形1中γ对$q_k^*(t)$的影响如图1所示。纳什均衡再保险策略$q_k^*(t)$会随着时间的增加而增大,这表示保险公司在经营过程中随着财富的累积,自身抵抗风险的能力会不断加强,从而再保险自留额增大。此外当风险厌恶系数γ_k增大时,纳什均衡再保险策略$q_k^*(t)$变小,这是由于对风险的厌恶程度降低,所以保险公司倾向于承担更多的自留水平,以减少再保费的支出。

表2　不同保险公司参数取值

名称	μ	n	σ	η	ω	γ	β_1	β_2	β_3
第一家保险公司	0.9	0.375	2.0	0.15	0.2	0.30	0.2	0.4	0.6
第二家保险公司	1.0	0.200	1.5	0.20	0.4	0.25	0.5	0.6	0.7

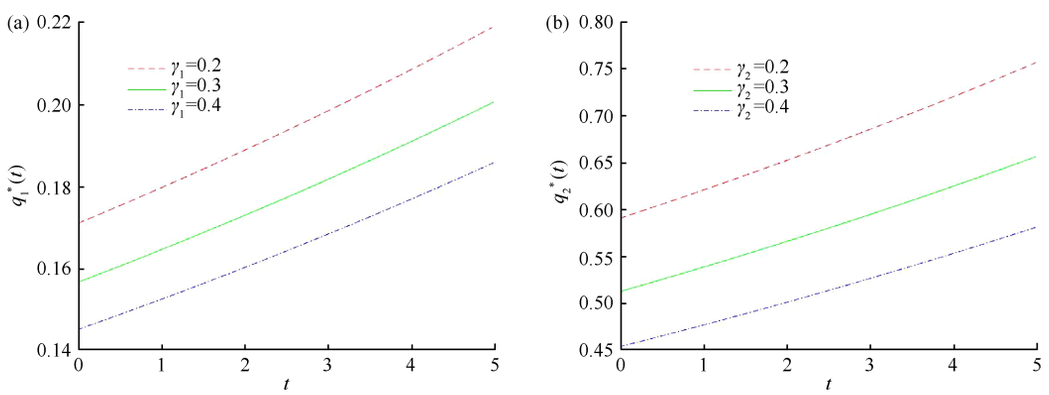


图1　情形一中γ对$q^*(t)$的影响

(a)γ_1对$q_1^*(t)$;(b)γ_2对$q_2^*(t)$

ω_1、ω_2对不同保险公司最优再保险策略的影响如图2和3所示。在2种情形下,2家保险公司的自留额比例$q_k^*(0)$,$\tilde{q}_k(0)$都随绩效敏感程度ω_k的增加而增加。一个合理的解释是,ω_k越大,表明保险公司更关心其相对的终端财富,因此倾向于保留更多的风险以支付更少的再保险保费。同样,当竞争对手的绩效敏感度越高时,意味着市场竞争越大,保险公司也会采取更激进的策略,即增加自留额水平。当保险公司持模糊厌恶态度时,$q_k^*(0)<1$,范围比$\tilde{q}_k^*(0)$小,说明2家保险公司在博弈中的模糊性厌恶态度使其对风险更加保守,因此他们倾向于将更多的风险转移给再保险公司。同时,当保险公司持模糊中性态度时,$\tilde{q}_k^*(0)>1$,表明此时保险公司不仅不购买再保险,且还要作为再保险人,承担更多的索赔风险,以赚取更多的再保费。

情形2中γ对$\tilde{\theta}^*(t)$的影响如图4所示。当股票市场和股票波动率之间的相关系数$\hat{\rho}>0$时,纳什均衡投资策略$\tilde{\theta}_k^*(t)$随着时间的增加而增大,这是由于随着财富的累积,保险公司会加大对风险资产的投资以获取更高收益。当$\hat{\rho}<0$时,$\tilde{\theta}_k^*(t)$会随着时间的增加而先增大后减少,是因为风险资产的收益率和波动率成负相关,因此投资额增加到一定程度后会开始减少。随着风险厌恶系数γ_k的增大,保险公司也会减少对风险资产的投资。

情形2中ω_1、ω_2对最优投资策略的影响如图5所示。随着绩效敏感程度的增加,2家保险公司在股票上的投资额都随之增加。对每家保险公司来说,最优的策略是投入更多的投资额以便在终端时刻前打败竞争者。

情形2中$\hat{\rho}$、κ对$\tilde{\theta}^*(0)$的影响如图6所示。展示了股票市场和股票波动率之间的相关系数$\hat{\rho}$,以及Heston模型中均值回归速度κ对最优投资策略的影响。当$\hat{\rho}>0$时,即股票收益和股票波动率呈正相关,均值回归速度κ越大,意味着股票波动率$L(t)$会更快地回到均值附近,此时会带来更稳定的股票收益,股票投资额随之加大;而$\hat{\rho}<0$时恰好相反,随着κ增大,股票投资额逐渐减少;当$\hat{\rho}=0$时,股票收益与股票波动率毫无关系,因此随着κ增大,股票投资额呈一条水平直线。

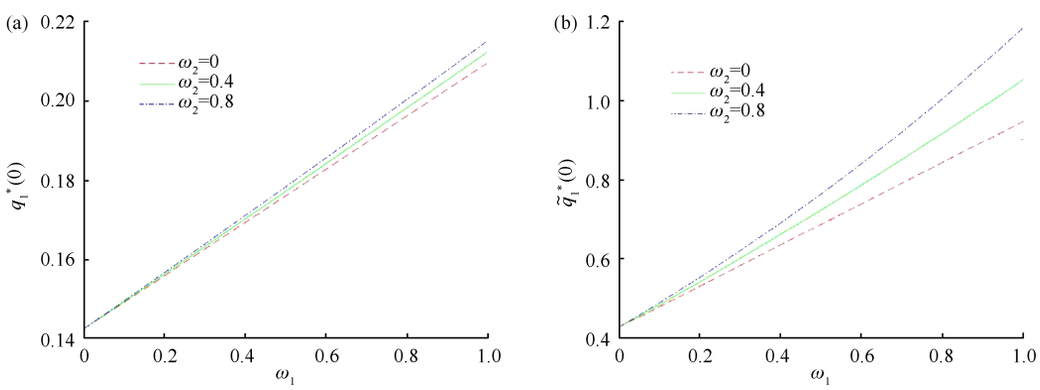


图2　ω_1、ω_2对第一家保险公司最优再保险策略的影响

(a)情形1中ω_1、ω_2对$q_1^*(0)$;(b)情形2中ω_1、ω_2对$\tilde{q}_1^*(0)$

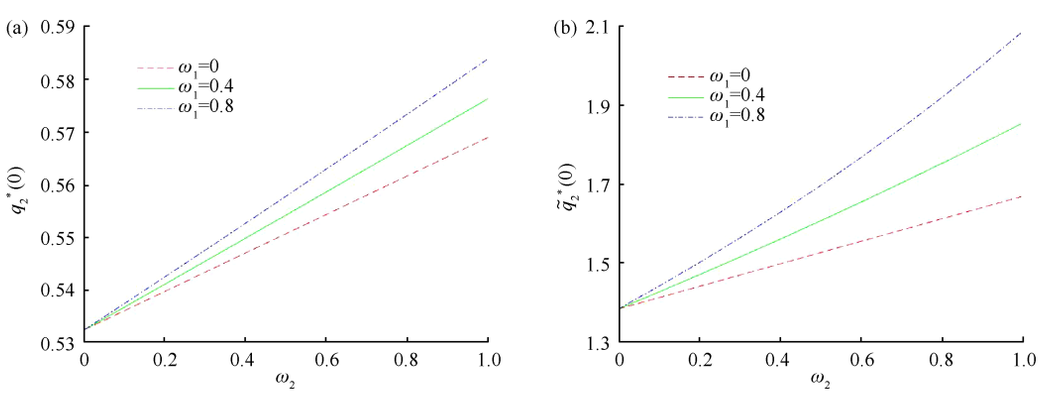


图3　ω_1、ω_2对第二家保险公司最优再保险策略的影响

(a)情形1中ω_1、ω_2对$q_2^*(0)$;(b)情形2中ω_1、ω_2对$\tilde{q}_2^*(0)$

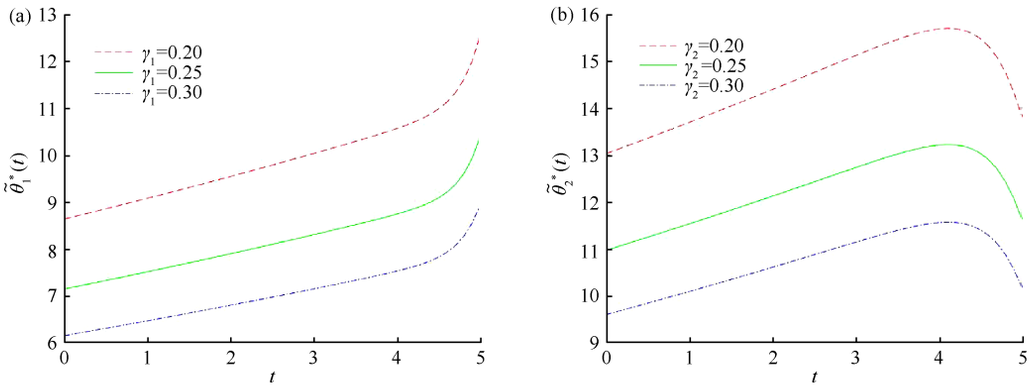


图4　情形2中γ对$\tilde{\theta}^*(t)$的影响

(a)γ_1对$\tilde{\theta}_1^*(t)$;(b)γ_2对$\tilde{\theta}_2^*(t)$

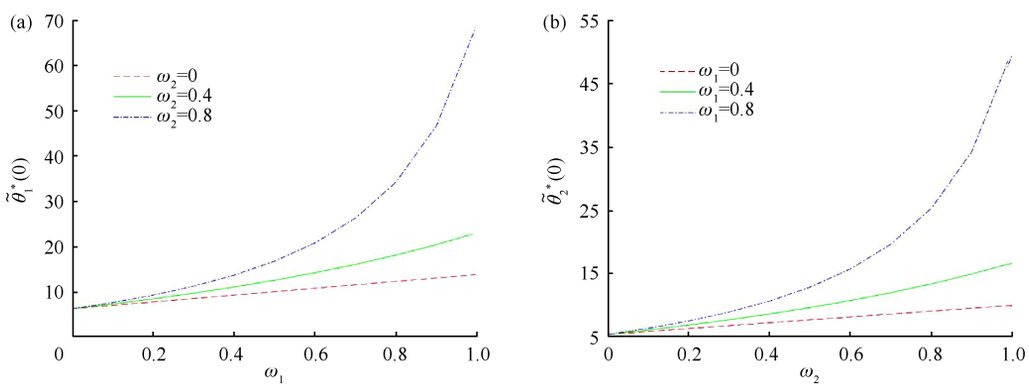


图5　情形2中ω_1、ω_2对最优投资策略的影响

(a)ω_1、ω_2对$\tilde{\theta}_1^*(0)$;(b)ω_1、ω_2对$\tilde{\theta}_2^*(0)$

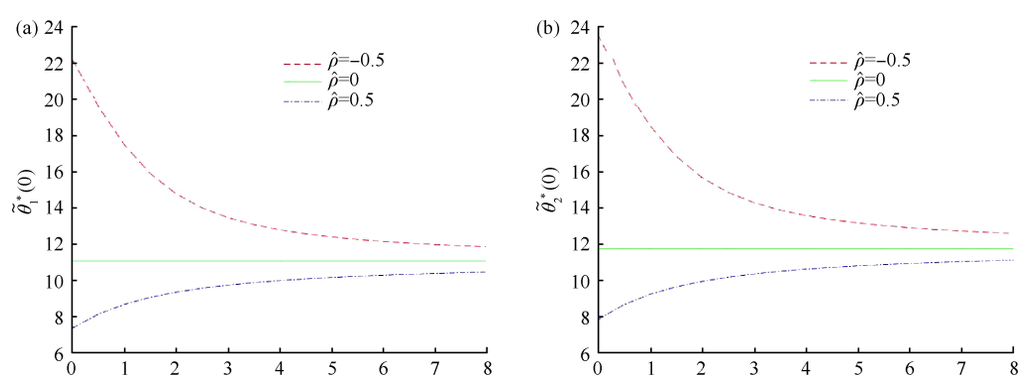


图6　情形2中$\hat{\rho}$、κ对$\tilde{\theta}^*(0)$的影响

(a)$\hat{\rho}$、κ对$\tilde{\theta}_1^*(0)$;(b)$\hat{\rho}$、κ对$\tilde{\theta}_2^*(0)$

5　结束语

本文主要研究了Heston投资模型下2家竞争保险公司之间的非零和博弈问题,假设每家保险公司都以终端时刻前相对绩效的期望效用最大化为目标,分别在其持模糊厌恶态度和模糊中性态度下,推导出值函数满足的HJB方程并得到了纳什均衡再保险和投资策略。通过数值算例显示,当保险公司开始关注竞争对手的表现时,其会增加再保险的自留额,并且加大对金融市场的投资,即竞争会使保险公司的策略变得更激进。论文结果区别于Wang等[11]和Deng等[13]的研究,在模糊厌恶态度下,保险公司会变得更谨慎,也就是说在相互竞争的情况下,保险公司倾向于将更多的风险转移给再

保险公司和对金融市场更少的投资。同时Heston模型中的均值回归速度也会影响对风险资产的投资额。

参 考 文 献

[1] SID B. Stochastic differential portfolio games [J]. Journal of Applied Probability, 2000, 37(1): 126-147.

[2] 罗琰,杨招军.基于随机微分博弈的保险公司最优决策模型[J].保险研究,2010(8):48-52.

[3] TAKSAR M, ZENG X. Optimal non-proportional reinsurance control and stochastic differential games [J]. Insurance (Mathematics and Economics), 2011, 48 (1): 64-71.

[4] BENSOUSSAN A, SIU C C, YAM S C P, et al. A class of non-zero-sum stochastic differential investment and reinsurance games [J]. Automatica, 2014, 50 (8): 2025-2037.

[5] ZHANG N, JIN Z, QIAN L, et al. Stochastic differential reinsurance games with capital injections [J]. Insurance (Mathematics and Economics), 2019, 88: 7-18.

[6] MENG H, LI S, JIN Z. A reinsurance game between two insurance companies with nonlinear risk processes [J]. Insurance (Mathematics and Economics), 2015, 62: 91-97.

[7] CAMPI L, SANTIS D D. Nonzero-sum stochastic differential games between an impulse controller and a stopper [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2020, 186(2): 688-724.

[8] CAIRNS A J G. A discussion of parameter and model uncertainty in insurance [J]. Insurance (Mathematics and Economics), 2000, 27(3): 313-330.

[9] 刘兵,周明.模糊厌恶下的最优投资与最优保费策略[J].系统工程理论与实践,2020,40(7):1707-1720.

[10] PUN C S, WONG H Y. Robust non-zero-sum stochastic differential reinsurance game [J]. Insurance (Mathematics and Economics), 2016, 68: 169-177.

[11] WANG N, ZHANG N, JIN Z, et al. Robust non-zero-sum investment and reinsurance game with default risk [J]. Insurance (Mathematics and Economics), 2019, 84: 115-132.

[12] 杨璐,朱怀念,张成科. Heston模型下基于期权投资的鲁棒最优控制[J].系统工程学报,2021,36(2):157-170.

[13] DENG C, ZENG X, ZHU H. Non-zero-sum stochastic differential reinsurance and investment games with default risk [J]. European Journal of Operational Research, 2018, 264(3): 1144-1158.

[14] SCHMIDLI H. Stochastic control in insurance [M]. London: Springer-Verlag, 2008.

[15] COX J C, INGERSOLL J E, ROSS S A. A theory of the term structure of interest rates [J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385-408.

[16] KLEBANER F C. Introduction to stochastic calculus with applications [M]. London: Imperial College Press, 2008.

[17] ESPINOSA G E, TOUZI N. Optimal investment under relative performance concerns [J]. Mathematical Finance, 2015, 25(2): 221-257.

[18] MAENHOUT P J. Robust portfolio rules and asset pricing [J]. Review of Financial Studies, 2004, 17(4): 951-983.

[19] FLEMING W H, SONER H M. Controlled markov processes and viscosity solutions [M]. New York: Springer, 2006.

[20] ZHAO H, RONG X, ZHAO Y. Optimal excess-of-loss reinsurance and investment problem for an insurer with jump-diffusion risk process under the Heston model [J]. Insurance (Mathematics and Economics), 2013, 53(3): 504-514.

[21] LIANG Z, YUEN K C. Optimal dynamic reinsurance with dependent risks: variance premium principle [J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2016(1): 18-36.

[22] CHEN Z P, YANG P. Robust optimal reinsurance-investment strategy with price jumps and correlated claims [J]. Insurance (Mathematics and Economics), 2020, 92: 27-46.

[23] MATARAMVURA S, ØKSENDAL B. Risk minimizing portfolios and HJBI equations for stochastic differential games [J]. Stochastics an International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2008, 80 (4): 317-337.

(责任编辑:马田田)