DOI:10.19789/j.1004-9398.2018.04.002

个人所得税问题讨论和全年一次性奖金的最优发放方案

王晓明 朱一心
(首都师范大学数学科学学院, 北京 100048)

摘 要

本文讨论了我国现行七级累进税率税法下的全年一次性奖金的最优方案,揭示了全年一次性奖金发放中的湮灭数,通过数学证明得到了最优方案的判别原则,给出最优方案的分段显式表示,将最优方案归纳成方便财务人员使用的数据表格形式.

关键词: 全年一次性奖金,当月奖,最优方案,个人所得税,应纳税金,税后所得,湮灭数.
中图分类号: O152,O151

0 引 言

《中华人民共和国个人所得税法》自 1980 年 9 月 10 日五届人大三次会议通过以来,经过了六次修正. 最近一次修正是 2011 年 6 月 30 日的十一届人大二十一次会议通过的,主要是将每月应纳税收入减除额提高到 3 500 元(下面行文中不再写出币值单位"元"),将九级累进税率改为七级累进税率. 税法规定对工薪按照超额累进税率计算个人所得税,个人所得税按月缴纳,每年有一次奖金(例如,年终发放的年度绩效奖金)可以除以 12 以后计算税率. 利用这样办法计算应纳税金的奖金称为全年一次性奖金,简称"全年奖". 不使用这个权利发放奖金,就是按照奖金与其他工薪合并的全额对应的税率计算应纳税金. 这样的奖金就是当月奖. 也可将奖金分成两部分,一部分作全年奖使用该权利,另一部分作当月奖不使用该权利,由此造成奖金的不同发放方案可以有不同的计税结果.

本文将讨论给定奖金总额时当月奖与全年奖的不同发放分配方案使得按税法计算的应纳税金最少因而税后收入最大,并称这样的奖金发放方案为最优发放方案,简称"最优方案".

2016 年以前许多学者提出了九级税率下的最优方案. 张海斌等[1] 构建个人所得税的优化模型,并在 Excel 中结合 solver parametersV 7.0 对该模型进行求解,得出奖金发放的最优方案; 贺株莉[2] 把文献[1]的优化模型做了简化,将其转换成 0-1 规划问题,并利用隐枚举法进行求解. 但这种简化模型只能针对定额奖金进行实时求解,并不能给出可直接套用的奖金发放分配表,实际应用不太方便. 顾峰娟[3] 利用分析方法,给出了最优方案,并把具体发放表达方案细化到区间. 郜林平[4] 考虑全年工薪总量,通过试算挖掘了一系列能引起月工薪和全年奖所适用税率发生变动的全年工薪分界点,对不同范围下的全年工薪收入,得出月工薪和全年奖的分配区间. 贾华芳[5] 提出一个原则,尽可能降低全年奖的适用税率,尤其在求得的全年奖除以 12 的商数高出较低一档税率的临界值不多时,减少全年奖,使其商数调减至该临界值,以降低适用税率.

本文针对全年奖最优发放方案,揭示了全年奖发放中的湮灭数,建立模型,通过数学证明得到了最优方案的发放原则,分析讨论最优方案的分段显式表示,并将最优方案归纳成方便财务人员使用的表格形式.

为方便讨论,将涉及的名词说明如下:

工薪: 公民的工资、薪金所得,简称"工薪".

应税所得: 工薪减除规定的免税款项,称为应纳税所得额,简称"应税所得". 税法规定,应税所得超过 3 500 部分开始征收个人所得税,为方便起见,本文所称应税所得为减除 3 500 以后的. 2016 年"两

收稿日期: 2017-07-05

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

会”期间,财政部发布消息,可能对个人所得税征收条款进行修订,对不同的群体增加免税款项,提高起征点. 本文的基本方法对于以上修订后的个人所得税征收办法也是适用的.

应纳税金: 应税所得乘以规定税率计算得出应纳个人所得税金额,简称“应纳税金”.

税后所得: 应税所得减除应纳税金后,得到“税后所得”,即“税后所得 = 应税所得 - 应纳税金”. 实际上,税后所得 = 工薪 - 应纳税金. 为了计算公式书写方便,本文将免税款项视作没有,将应税所得视作减除了 3 500 以后的,即“应税所得 = 工薪 - 3 500”,因此“税后所得 = 应税所得 - 应纳税金”,实际税后所得 = 税后所得 + 3 500.

扣除数: 为方便计算,税法对于每级税率都给出了速算扣除数,简称“扣除数”,即把应税所得乘以达到最高级的税率计算应纳税金时,多计算的数值. “应纳税金 = 应税所得 × 税率 - 扣除数” “税后所得 = 应税所得 × (1 - 税率) + 扣除数”.

全年奖: 根据税法,个人所得税按月缴纳,每年有一次奖金(例如,年终发放的年度绩效奖金)可以除以 12 以后计算税率(将年度绩效奖金视同每月绩效奖金的积累,每月发一次奖金的积累),利用这样办法计算应纳税金的奖金称为全年一次性奖金,简称“全年奖”.

当月奖: 与全年奖相对应,在发放当月与其他工薪合并纳税的奖金.

本文将讨论全年奖发放的最优方案,先对速算扣除数做一点介绍.

1　速算扣除数

每月应税所得按照以下超额累进税率交纳个人所得税,见表 1(为说明问题,增加一列级差值).

表 1　个人所得税税率表

税级 k	级差 x_k	应税所得 x	税率(%) r_k	扣除数 s_k
1	1 500	不超过 1 500 的部分	3	0
2	3 000	超过 1 500 至 4 500 的部分	10	105
3	4 500	超过 4 500 至 9 000 的部分	20	555
4	26 000	超过 9 000 至 35 000 的部分	25	1 005
5	20 000	超过 35 000 至 55 000 的部分	30	2 755
6	25 000	超过 55 000 至 80 000 的部分	35	5 505
7	∝	超过 80 000 的部分	45	13 505

非专业人员对于其中扣除数的含义不了解,因此有类似这样的担心: 应税所得为 1 500 时税率为 3%,应纳税金 45; 如果应税所得为 1 501,税率为 10%,应纳税金为 150.1,税后所得不是反而少了吗? 这种担心当然是因为对于扣除数不理解造成的,下面将作说明.

用符号 x_k, r_k, s_k 分别表示第 k 级应税所得的级差、税率、扣除数. 用 $X_t = \sum_{k=1}^{t} x_k$ 表示第 t 级应税所得的上限,如第四级应税所得的上限是

$$X_4 = 35\,000 = 1\,500 + 3\,000 + 4\,500 + 26\,000 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

按照超额累进计税办法,对应于当月应税所得 x 需要交纳的应纳税金

$$T = T(x) = \begin{cases} xr_1, & x \leqslant 1\,500, \\ x_1r_1 + (x - 1\,500)r_2, & 1\,500 < x \leqslant 4\,500, \\ x_1r_1 + x_2r_2 + (x - 4\,500)r_3, & 4\,500 < x \leqslant 9\,000, \\ x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3 + (x - 9\,000)r_4, & 9\,000 < x \leqslant 35\,000, \\ x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3 + x_4r_4 + (x - 35\,000)r_5, & 35\,000 < x \leqslant 55\,000, \\ x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3 + x_4r_4 + x_5r_5 + (x - 55\,000)r_6, & 55\,000 < x \leqslant 80\,000, \\ x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3 + x_4r_4 + x_5r_5 + x_6r_6 + (x - 80\,000)r_7, & x > 80\,000. \end{cases}$$

上述表达式 $T = T(x)$ 是一个阶梯函数,其计算含义是清楚的,体现了个人所得税按照超额累进税率纳税的原则. 利用符号,数学表达可以简化为

$$T = T(x) = \sum_{k=0}^{t} x_kr_k + (x - X_t)r_{t+1},$$
$$X_t < x \leqslant X_{t+1}, 0 \leqslant t \leqslant 6,$$

其中约定 $X_0 = x_0 = 0, X_7 = x_7 = \infty, X_t = \sum_{k=0}^{t} x_k$.

在实际计算中,利用速算扣除数可以减少计算操作. 事实上,当税率为 10% 时,有以下等式:

$$x_1r_1 + (x - 1\,500)r_2 = xr_2 - 1\,500(r_2 - r_1) = xr_2 - 105.$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

表 2 一些特殊例子的应税所得和应纳税金

应税所得 x	应纳税金 y	税后所得 $x-y$	比例税率 y/x(%)
1 500	45	1 455	3
4 500	345	4 155	7.67
5 475	540	4 935	9.86
7 775	1 000	6 775	12.86
9 000	1 245	7 755	13.83
10 000	1 495	8 505	15.95
12 020	2 000	10 020	16.64
18 000	3 495	14 505	19.41
21 940	4 480	17 460	20.42
35 000	7 745	27 255	22.13
55 000	13 745	41 255	24.99
80 000	24 995	55 005	31.24

其含义是,当应税所得超过 1 500 不超过 4 500 时,1 500应该按照 3% 纳税,超过 1 500 部分应该按照 10% 纳税; 为了计算方便,如果将所有应税所得都按照 10% 纳税,那么 1 500 部分就多纳税 7%,应该在计算值中予以扣除,即扣除 $1\ 500\times(10\%-3\%)=105$. 因此税率为 3% 时的扣除数就是 105.

容易推出 $t>1$ 时,第 t 级的扣除数的表达式为

$$s_t=x_1(r_t-r_1)+x_2(r_t-r_2)+\cdots+x_{t-1}(r_t-r_{t-1})=\sum_{k=1}^{t-1}x_k(r_t-r_k)=X_{t-1}r_t-\sum_{k=1}^{t-1}x_kr_k.$$

因此税率为 20%,25%,30%,35%,45% 时对应的扣除数分别为 555,1 005,2 755,5 505,13 505. 扣除数的级差为 $s_{t+1}-s_t=\sum_{k=1}^{t}x_k(r_{t+1}-r_k)-\sum_{k=1}^{t-1}x_k(r_t-r_k)=x_t(r_{t+1}-r_t)+\sum_{k=1}^{t-1}x_k(r_{t+1}-r_t)=X_t(r_{t+1}-r_t)$.

扣除数的含义是,对于本来应该按照低档级税率纳税的应税所得,如果被按照高档级税率计算纳税额了,应该补偿回来的数额. 扣除数的本质仍然是对于应税所得的超额部分实行高税率纳税.

2 全年奖的纳税

根据国家税务总局公告 2011 第 28 号和国税发[2005] 9 号文件,全年奖的纳税办法如下: 在全年奖发放当月,若当月的工薪小于 3 500,即当月工薪没有达到个人所得税起征点,则在全年奖中扣除当月工薪与 3 500 的差额作为全年奖的计税基础 x(本文假设全年奖的计税基础就是全年奖全额,即奖金发放当月的工薪超过 3 500,因为实际上可以将一部分按照工薪发放,使得当月工薪超过 3 500). 找出 $\frac{x}{12}$ 对应的税率 r 和对应的扣除数 s,则应纳税金为 $T=T(x)=xr-s$,税后所得为 $G=x-F(x)=x(1-r)+s$.

这个办法意味着不是以全年奖 x 而是以 x 的十二分之一对应的税率计算应纳税金. 不使用这个权利发放奖金,就是按照奖金 x 对应的税率计算应纳税金. 也可将奖金分成两部分,一部分作全年奖使用该权利,另一部分作当月奖不使用该权利,这使得纳税方案有讨论的空间.

当奖金 $x\leqslant 18\ 000$ 时,作全年奖发放,$\frac{x}{12}\leqslant 1\ 500$,$r=3\%$,$s=0$,应纳税金为 $T=0.03x$,这是个最优方案,因为如果将 x 或者其中一部分作当月奖,所适用的税率都不会小于 3%. 事实上,发放 18 000 全年奖,应纳税金为 540,税后所得为 17 460. 而发放 18 000 当月奖的应纳税金为 3 495; 应纳税金为 540 最多可以发放当月奖 5 475; 要使税后所得为 17 460需要发放当月奖 21 490. 当 $18\ 000<x\leqslant 54\ 000$ 时,把 x 作全年奖发放,$1\ 500<\frac{x}{12}\leqslant 4\ 500$,$r=10\%$,$s=105$,记 $x=18\ 000+12\Delta x$,则 $T=T(x)=(18\ 000+12\Delta x)\times 0.1-105=1\ 695+12\Delta x\times 0.1=540+(1\ 155+12\Delta x\times 0.1)$.

只要 $\Delta x\neq 0$,则应纳税金从 540 直接跳至 540 + 1 155. 因此哪怕名义上奖金增加量 Δx 只有一分钱,应纳税金将增加至少 1 155,实际税后所得却少 1 155,超额纳税率为 $\frac{1\ 155}{18\ 000}=6.4\%$,这显然是一个不可忽视的严重问题.

类似的问题在每个税级点都存在,而且税率级差越大,超额纳税率越高. 例如,全年奖为 960 000 时,应纳税金 330 495,而全年奖为 $960\ 000+12\Delta x$ 时,应纳税金 $330\ 495+(88\ 000+12\Delta x\times 0.45)$,超额纳税率为 $\frac{88\ 000}{960\ 000}=9.17\%$.

问题存在的原因是可以分析的,为了方便说明避免在表达式中出现分数,我们将全年奖记作 $12x$,当 $X_t<x\leqslant X_{t+1}$ 时,x 对应的税率和扣除数为 r_{t+1} 和 s_{t+1},应纳税金为 $T(12x)=12xr_{t+1}-s_{t+1}$. 当 $x=X_t+\Delta x$ 时,应纳税金为

$$\begin{aligned}T(12(X_t+\Delta x))&=12(X_t+\Delta x)r_{t+1}-s_{t+1}\\&=(12X_tr_t-s_t)+[2X_t(r_{t+1}-r_t)-(s_{t+1}-s_t)]+12\Delta xr_{t+1}\\&=T(12X_t)+[2X_t(r_{t+1}-r_t)-X_t(r_{t+1}-r_t)]+12\Delta xr_{t+1}\\&=T(12X_t)+11X_t(r_{t+1}-r_t)+12\Delta xr_{t+1}.\end{aligned}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当 Δx 很小时,$T(12(X_t+\Delta x))-T(12X_t)\approx 11X_t(r_{t+1}-r_t)=11(s_{t+1}-s_t)$.

因此全年奖的少量增长,会引起应纳税金大幅增长,导致税后所得不升反降. 相对于 $12X_t$ 来说,超额纳税率为 $11X_t(r_{t+1}-r_t)/12X_t=11(r_{t+1}-r_t)/12$.

《中华人民共和国个人所得税法》中,提供了超额累进税率法和比例税率法两种方法,显然全年奖纳税方法不是比率税法,也不同于超额累进税率法. 如果按照超额累进税率纳税办法,首先应该将 1 到 12 月每个月的工薪收入少于 3 500 的差额都在全年奖中扣除,然后作计税基础,而不是仅扣除当月工薪少于 3 500 的差额得出计税基础 $12(X_t+\Delta x)$(这一点本文忽略不考虑,假定每个月的工薪都超过了 3 500). 其次,既然意图将全年奖当成全年的绩效,对于 $12(X_t+\Delta x)$,相当于每个月发放当月奖 $X_t+\Delta x$,按照超额累进税率纳税法,每个月应纳税金应该为 $(X_t+\Delta x)r_{t+1}-s_{t+1}$,12 个月应纳税金应该为 $12(X_t+\Delta x)r_{t+1}-12s_{t+1}$,而不是 $12(X_t+\Delta x)r_{t+1}-s_{t+1}$. 目前税法规定的全年奖纳税办法,比超额累进税率多缴纳税金 $11s_{t+1}$.

可见全年奖的纳税办法,不是超额累进税率纳税法,但用了超额累进税率的概念. 这种纳税方法中,在每个税级点上都会发生税前收入增加但税后所得减少的情形. 于是要考虑在奖金总额不变的情况下,寻找全年奖与当月奖的分配方案,使得应纳税金最小.

3　湮灭数

设全年奖为 $Q=12x$,当 $x=X_t$ 时,税后所得为 $G(12X_t)=12X_t(1-r_t)+s_t$.

当 $x=X_t+\Delta x$ 时,税后所得为

$$G(12(X_t+\Delta x))=G(12X_t)+12\Delta x(1-r_{t+1})-11(s_{t+1}-s_t).$$

税后所得增加

$$G(12(X_t+\Delta x))-G(12X_t)=12\Delta x(1-r_{t+1})-11(s_{t+1}-s_t).$$

当全年奖增加 $12\Delta x\leqslant 11(s_{t+1}-s_t)/(1-r_{t+1})$ 时,增加量全用于纳税还不够,税后所得减少 $11(s_{t+1}-s_t)-12\Delta x(1-r_{t+1})$. 我们将 $11(s_{t+1}-s_t)/(1-r_{t+1})=11X_t(r_{t+1}-r_t)/(1-r_{t+1})$ 称为第 t 级全年奖湮灭数,记为 Z_t.

表 3　湮灭数

税级 t	湮灭数 Z_t	湮灭率 $11(r_{t+1}-r_t)/12$(%)
1	1 283.333	6.4
2	6 187.5	9.17
3	6 600	4.58
4	27 500	4.58
5	46 538.462	4.58
6	160 000	9.17

由上述讨论所知,湮灭数来源于对全年奖没有按照超额累进税率纳税办法的原理提高速算扣除数计税,但又按照超额累进税率纳税办法的计算形式计税.

湮灭数来自全年奖多缴纳的应交税金,如果把湮灭数 Z_t 当作当月奖金发放,假设当月其他工薪不少于 3 500,则湮灭数对应的税率最高为 45%,湮灭数 × 对应税率 − 扣除数 ≤ 应纳税金 ≤ 湮灭数 × 45%,相应的税后所得是对湮灭数的挽救,如果当月其他工薪恰好是 3 500 时,用当月奖来代替全年奖,各级湮灭数的挽救率是相当大的.

表 4　各级湮灭数用当月奖挽救

税级 t	湮灭数 Z_t	当月奖税率%	应纳税金	税后所得
1	1 283.333	3 ~ 45	38.5 ~ 577.5	705.83 ~ 1 244.83
2	6 187.5	20 ~ 45	682.5 ~ 2 784.38	3 403.12 ~ 5 505
3	6 600	20 ~ 45	765 ~ 2970	3 630 ~ 5 835
4	27 500	25 ~ 45	5 870 ~ 12 375	15 125 ~ 21 630
5	46 538.462	30 ~ 45	11 206.54 ~ 20 942.3	25 596.16 ~ 35 331.92
6	160 000	45	72 000	88 000

当全年奖可能被湮灭时,可能采取的做法是把全年奖中的一部分按照全年奖发放,其余部分按照当月奖发放. 在引言部分我们已经提到了很多学者已有的纳税方案,下面来阐述本文的方法.

4　全年奖的最优方案

4.1　优化模型

假定发放全年奖当月的其他工薪为 3 500,全年奖的最优发放即为对于任意固定的奖金 $Q\in[0,+\infty)$,寻找最优方案,使得缴纳的税金最少,从而可

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

建立如下优化模型:

Obj: $\min T = f(x) + g(y)$,

St: $12x + y = Q$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

其中 $f(x) = 12xr_t - s_t, x \in (X_{t-1}, X_t]$,是全年奖 $12x$ 对应的应纳税金,$f(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上以 $X_t(t = 1, 2\cdots 6)$ 为跳跃间断点的分段线性函数,X_t 处的跃度为 $11(s_{t+1} - s_t)$,如图 1 所示.

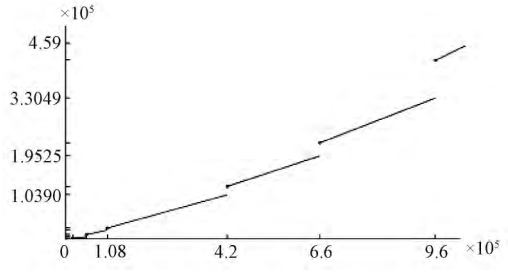


图 1 全年奖 $12x$ 的应纳税金函数 $f(x)$

$g(y) = yr_n - s_n, y \in (X_{n-1}, X_n]$,是当月奖 y 对应的应纳税金,$g(y)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的分段区间线性的连续函数,如图 2 所示.

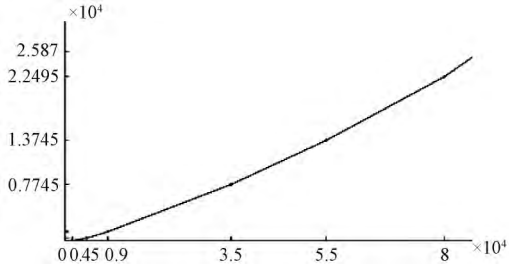


图 2 当月奖 y 的应纳税金函数 $g(y)$

将全年奖为 $12x$,当月奖为 y 的发放方案记为方案 $(12x, y)$. 当 $Q = 12x + y$ 不变时,$12x$ 和 y 合理分配使 T 达到最小值的方案就是最优方案.

对于两种方案 $(12x, Q - 12x)$ 与 $(12x', Q - 12x')$,若缴纳的税金相同,就称它们同优;若前一种比后一种缴纳的税金更少,就称方案 $(12x, Q - 12x)$ 优于 $(12x', Q - 12x')$.

设方案 $(12x, y)$ 对应税级 (t, n),当 $t = n$ 时,称为同级方案,此时 $X_{t-1} < x, y \leqslant X_t$,适当调整可假设 $x = y$,因此方案可记成 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$,其中 Q 满足 $X_{t-1} < \frac{Q}{13} \leqslant X_t$.

需要说明的是,按照前面的假定,当月其他工薪超过 3 500,将 y 按照当月奖发放,对应的税率会受到当月其他工薪影响,优化模型中假设对应其他工薪 3 500 是为了计算和说明的方便.

4.2 级差函数

为了便于后续讨论,定义如下级差函数:

$k(t) = f(12X_t) - f(12X_{t-1})$, $h(y, t) = g(y + 12x_t) - g(y)$, $x_t = X_t - X_{t-1}, t = 1, 2, \cdots 6, y \in [0, +\infty)$.

$k(t)$ 和 $h(y, t)$ 分别用于描述全年奖和当月奖应纳税金的级差变化,而 $h(y, t) - k(t)$ 用于描述从方案 $(12X_t, Q - 12X_t)$ 变化到方案 $(12X_{t-1}, Q - 12X_{t-1})$ 时应纳税金的变化量.

易知,对于固定的 t,$h(y, t)$ 是连续函数,也是关于 y 的单调不减函数,且当 $y \in [X_6, +\infty)$,$h(y, t)$ 为常数. 所以对于固定的 t 有 $h(0, t) \leqslant h(y, t) \leqslant h(X_6, t)$.

通过简单计算可知,当 $t = 1, 2, 4, 5$ 时,$h(0, t) > k(t)$;当 $t = 6$ 时,$h(X_6, t) < k(t)$. 当 $t = 3$ 时,可以解得 $y = 13\ 500$ 时,$k(3) = h(y, 3)$.

例如 $t = 4$,$k(4)$ 表示从方案 $(12X_4, Q - 12X_4)$ 变化到 $(12X_3, Q - 12X_3)$ 全年奖对应应纳税金的减少量,$h(y, 4)$ 表示当月奖对应应纳税金的增加量,由表 5 知 $h(y, 4) - k(4) > 0$,所以总应纳税金增加了,因此方案 $(12X_4, Q - 12X_4)$ 优于 $(12X_3, Q - 12X_3)$.

表 5 函数 $h(y, t)$ 与 $k(t)$ 大小关系表

t	$k(t)$	$h(y, t)$	$h(y, t) - k(t)$	结论
1	$f(12X_1)$	$g(y + 12X_1) - g(y)$	$> 0, y \in [0, +\infty)$	$(12X_1, Q - 12X_1)$ 优于 $(0, Q)$
2	$f(12X_2) - f(12X_1)$	$g(y + 12x_2) - g(y)$	$> 0, y \in [0, +\infty)$	$(12X_2, Q - 12X_2)$ 优于 $(12X_1, Q - 12X_1)$
3	$f(12X_3) - f(12X_2)$	$g(y + 12x_3) - g(y)$	$\leqslant 0, y \in [0, 13\ 500]$ $> 0, y \in (13\ 500, +\infty)$	当 $y \in [0, 13\ 500]$,$(12X_2, Q - 12X_2)$ 优于 $(12X_3, Q - 12X_3)$; 当 $y \in (13\ 500, +\infty)$,$(12X_3, Q - 12X_3)$ 优于 $(12X_2, Q - 12X_2)$
4	$f(12X_4) - f(12X_3)$	$g(y + 12x_4) - g(y)$	$> 0, y \in [0, +\infty)$	$(12X_4, Q - 12X_4)$ 优于 $(12X_3, Q - 12X_3)$
5	$f(12X_5) - f(12X_4)$	$g(y + 12x_5) - g(y)$	$> 0, y \in [0, +\infty)$	$(12X_5, Q - 12X_5)$ 优于 $(12X_4, Q - 12X_4)$
6	$f(12X_6) - f(12X_5)$	$g(y + 12x_6) - g(y)$	$< 0, y \in [0, +\infty)$	$(12X_5, Q - 12X_5)$ 优于 $(12X_6, Q - 12X_6)$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

4.3　最优方案的判别原则

定理 1　若最优方案 $(12x,y)$ 对应税级为 (t,n),则 $t \leqslant n$.

证明　假定 $t > n$. 将方案调整为同级方案 $(12x-12\Delta x, y+12\Delta x)$,对应税级 (t',t'),其中 $t \geqslant t' \geqslant n$. 则全年奖对应应纳税金 f 减少,减少量记为 Δf; 当月奖对应应纳税金 g 增加,增加量记为 Δg,总应纳税金 T 的变化量 $\Delta T = \Delta g - \Delta f$.

显然有 $\Delta g \leqslant 12\Delta x r_{t'}$,$\Delta f \geqslant 12\Delta x r_{t'}$,因此 $\Delta T = \Delta g - \Delta f \leqslant 0$,应纳税金 T 不发生变化或者减少. 所以税级为 (t,n) $(t > n)$ 的方案可以调整为同级方案. 因此最优方案的税级一定满足 $t \leqslant n$,得证.

定理 2　若最优方案 $(12x,y)$ 对应税级为 (t,n),且 $t < n$,则 $x = X_t$.

证明　设两种方案 $(12X_t, Q-12X_t)$ 和 $(12x', Q-12x')$ 的应纳税金分别为 T,T',对应税级均为 (t,n). 其中 $x' \neq X_t$,$X_{t-1} < x' < X_t$,记 $\Delta x = X_t - x'$. 则

$$T = 12X_t r_t - s_t + (Q-12X_t) r_n - s_n,\ T' = 12x' r_t - s_t + (Q-12x') r_n - s_n = 12(X_t - \Delta x) r_t - s_t + (Q-12X_t+12\Delta x) r_n - s_n = T + 12\Delta x(r_n - r_t).$$

因为 $t < n$,所以 $r_t < r_n$,$12\Delta x(r_n - r_t) > 0$,从而 $T' > T$. 方案 $(12X_t, Q-12X_t)$ 优于 $(12x', Q-12x')$. 所以若最优方案的税级为 (t,n),且 $t < n$,则最优方案一定是 $(12X_t, Q-12X_t)$,即 $x = X_t$.

定理 3　(1) 方案 $(12X_4, Q-12X_4)$ 优于 $(12X_i, Q-12X_i)$,$i = 0,1,2,3$.

(2) 方案 $(12X_5, Q-12X_5)$ 优于 $(12X_i, Q-12X_i)$,$i = 0,1,2,3,4$.

证明　(1) 由表 5,方案 $(12X_4, Q-12X_4)$ 优于 $(12X_3, Q-12X_3)$.

方案 $(12X_3, Q-12X_3)$ 的当月奖 $Q-12X_3 = (Q-12X_4) + 12(X_4 - X_3) > 12(X_4 - X_3) = 312\,000 > 13\,500$,结合表 5 中 $t = 3$ 时的结论知,$(12X_3, Q-12X_3)$ 优于 $(12X_2, Q-12X_2)$,因此方案 $(12X_4, Q-12X_4)$ 也优于 $(12X_2, Q-12X_2)$. 再由表 5 中 $t = 1, t = 2$ 时的结论,可得方案 $(12X_4, Q-12X_4)$ 也一定优于 $(12X_1, Q-12X_1)$ 和 $(0,Q)$. 结论 (1) 得证.

(2) 由表 5 知 $(12X_5, Q-12X_5)$ 优于 $(12X_4, Q-12X_4)$,由 (1) 知结论成立.

定理 4　若奖金 $Q = 12x + y \in (13X_{t-1}, 13X_t]$,则

(1) 当 $t = 2,4,5$ 时,存在 $Q_t \in (13X_{t-1}, 13X_t]$,使得当 $Q = Q_t$ 时,同级方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 与 $(12X_{t-1}, Q-12X_{t-1})$ 同优,而且当 $Q > Q_t$ 时,同级方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 优于 $(12X_{t-1}, Q-12X_{t-1})$,也是最优方案;

当 $Q < Q_t$ 时,方案 $(12X_{t-1}, Q-12X_{t-1})$ 优于同级方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$.

(2) 当 $t = 3$ 时,方案 $(12X_2, Q-12X_2)$ 优于同级方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$,也是最优方案;

当 $t = 6$ 时,方案 $(12X_5, Q-12X_5)$ 优于同级方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$,也是最优方案.

证明　第一步 用 Q_t 表示同级方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 与 $(12X_{t-1}, Q-12X_{t-1})$ 缴纳税金相同时的奖金.

由定理 1,最优方案对应的税级 $t \leqslant n$. 首先考虑同级方案,$\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 显然是同级方案的一种方案,设对应的税级为 (t,t). 下面比较方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 与 $(12X_{t-1}, Q-12X_{t-1})$.

记 $12\Delta x = \frac{12}{13}Q - 12X_{t-1}$ 表示从方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 调整到 $(12X_{t-1}, Q-12X_{t-1})$ 时全年奖的减少量,$\Delta y = 12\Delta x - \left(X_t - \frac{Q}{13}\right)$ 表示从方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 调整到 $(12X_{t-1}, Q-12X_{t-1})$ 时在 $(X_{t-1}, X_t]$ 之外的那部分区间上当月奖的增加量. 如图 3,图 4.

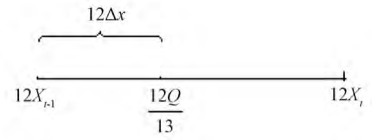


图 3　全年奖的减少量 $12\Delta x$

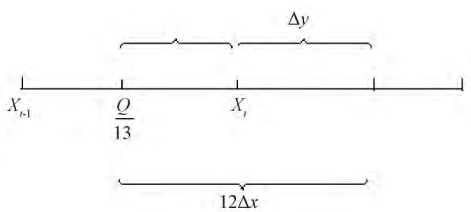


图 4　当月奖的增加量

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

为了方便后续证明,对 $Q \in (13X_{t-1}, 13X_t]$, $t = 2,3,4,5,6$,用 $U(Q,t)$ 和 $V(Q,t)$ 分别描述从方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 调整到 $(12X_{t-1}, Q - 12X_{t-1})$ 时对应的当月奖和全年奖应纳税金的变化量.

$$U(Q,t) = \left(X_t - \frac{Q}{13}\right) r_t + (X_{t+1} - X_t) r_{t+1} + (X_{t+2} - X_{t+1}) r_{t+2} + \cdots + (\Delta y - (X_{t+k} - X_t)) r_{t+k+1} = \left(X_t - \frac{Q}{13}\right) r_t + (X_{t+1} - X_t) r_{t+1} + (X_{t+2} - X_{t+1}) r_{t+2} + \cdots + (Q - 12X_{t-1} - X_{t+k}) r_{t+k+1},$$

$$V(Q,t) = \left(\frac{12}{13}Q - 12X_{t-1}\right) r_t + 11(s_t - s_{t-1}),$$

其中 k 是从方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 调整到 $(12X_{t-1}, Q - 12X_{t-1})$,当月奖对应税级从 t 调整到 $t + k + 1$.

特别地,当 $Q = 13X_t$ 时,$U(Q,t) = h(X_t,t)$, $V(Q,t) = k(t)$.

第二步 下面证明,对固定的 t,$U(Q,t) - V(Q,t)$ 是关于 Q 的单调递增函数.

任给 $\Delta Q \geqslant 0$,且 $Q + \Delta Q \leqslant 13X_t$(这样要求保证了 $Q + \Delta Q$ 仍在定义域里,且同时方案 $\left(\frac{12Q + 12\Delta Q}{13}, \frac{Q + \Delta Q}{13}\right)$ 对应税级也是 (t,t),即 t 固定).

$$[U(Q + \Delta Q,t) - V(Q + \Delta Q,t)] - [U(Q,t) - V(Q,t)] = [U(Q + \Delta Q,t) - U(Q,t)] - [V(Q + \Delta Q,t) - V(Q,t)].$$

其中 $U(Q + \Delta Q,t) - U(Q,t) = \left[X_t - \frac{Q + \Delta Q}{13}\right] r_t + (X_{t+1} - X_t) r_{t+1} + (X_{t+2} - X_{t+1}) r_{t+2} + \cdots + (Q + \Delta Q - 12X_{t-1} - X_{t+l}) r_{t+l+1}] - \left[\left(X_t - \frac{Q}{13}\right) r_t + (X_{t+1} - X_t) r_{t+1} + (X_{t+2} - X_{t+1}) r_{t+2} + \cdots + (Q - 12X_{t-1} - X_{t+k}) r_{t+k+1}\right] > \Delta Q r_{t+k+1} - \frac{\Delta Q}{13} r_t > \Delta Q r_t - \frac{\Delta Q}{13} r_t = \frac{12\Delta Q}{13} r_t$,其中 l 是从方案 $\left(\frac{12Q + 12\Delta Q}{13}, \frac{Q + \Delta Q}{13}\right)$ 调整到 $(12X_{t-1}, Q - 12X_{t-1})$,当月奖对应税级从 t 调整到 $t + l + 1 (l \geqslant k)$.

$$V(Q + \Delta Q,t) - V(Q,t) = \left[\frac{12}{13}(Q + \Delta Q) - 12X_{t-1}\right] r_t + 11(s_t - s_{t-1}) - \left(\frac{12}{13}Q - 12X_{t-1}\right) r_t - 11(s_t - s_{t-1}) = \frac{12\Delta Q}{13} r_t.$$

所以 $[U(Q + \Delta Q,t) - V(Q + \Delta Q,t)] - [U(Q,t) - V(Q,t)] > 0$,即对固定的 t,$U(Q,t) - V(Q,t)$ 是关于 Q 的单调递增函数.

若方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 与 $(12X_{t-1}, Q - 12X_{t-1})$ 同优,则

$$\begin{cases} \frac{12}{13}Q - 12X_{t-1} = X_t - \frac{Q}{13} + y, & (\text{Ⅰ}) \\ (X_{t+k} - X_t) \leqslant y \leqslant (X_{t+k+1} - X_t), k = 0,1,\cdots 6 - t, \\ V(Q,t) = U(Q,t). & (\text{Ⅱ}) \end{cases}$$

其中方程(Ⅰ)表示从方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 调整到 $(12X_{t-1}, Q - 12X_{t-1})$ 时,全年奖的减少量与当月奖的增加量相同,方程(Ⅱ)表示从方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 调整到 $(12X_{t-1}, Q - 12X_{t-1})$ 时,全年奖和当月奖对应应纳税金的变化量相同.

解上述方程组求得的 Q 记成 Q_t,显然 $Q = Q_t$ 时,方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 与 $(12X_{t-1}, Q - 12X_{t-1})$ 同优.

通过计算可以得到不同级 t 对应的 Q_t,如表 6 所示.

表 6 各税级的 Q_t

t	1	2	3	4	5	6
Q_t	—	31 700	—	195 250	620 000	—

第三步 下面对 $t = 2,3,4,5,6$ 的情况分别来证明结论(1)(2).

由第一步知对 $t = 2,4,5$,当 $Q = Q_t$ 时,$U(Q,t) - V(Q,t) = 0$. 利用函数 $U(Q,t) - V(Q,t)$ 的单调性可得当 $Q < Q_t$,$U(Q,t) - V(Q,t) < 0$;当 $Q > Q_t$,$U(Q,t) - V(Q,t) > 0$. 故当 $Q < Q_t$,方案 $(12X_{t-1}, Q - 12X_{t-1})$ 优于同级方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$.

当 $Q > Q_t$,同级方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 优于 $(12X_{t-1}, Q - 12X_{t-1})$;下面按 $t = 2,4,5$ 说明它也是最优方案.

对 $t = 2$,当 $Q > Q_2 = 31\ 700$,同级方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 优于 $(12X_1, Q - 12X_1)$,由表 5,又有 $(12X_1, Q - 12X_1)$ 优于 $(0,Q)$,所以同级方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 也优于 $(0,Q)$,是最优方案.

对 $t = 4$,当 $Q > Q_4 = 195\ 250$ 时,同级方案

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\left(\frac{12Q}{13},\frac{Q}{13}\right)$优于$(12X_3, Q-12X_3)$，下面证明它也是最优. 从方案$\left(\frac{12Q_4}{13},\frac{Q_4}{13}\right)$调整到$(12X_3, Q-12X_3)$后，$(12X_3, Q-12X_3)$的当月奖$y' = \frac{Q_4}{13} + \frac{12Q_4}{13} - 12X_3 = Q_4 - 12X_3 = 134\,000$，而当$Q > Q_4$时，从方案$\left(\frac{12Q}{13},\frac{Q}{13}\right)$调整到$(12X_3, Q-12X_3)$后，方案$(12X_3, Q-12X_3)$的当月奖$y > y' = 134\,000 > 13\,500$，由表 5 方案$(12X_3, Q-12X_3)$优于$(12X_2, Q-12X_2)$. 所以同级方案$\left(\frac{12Q}{13},\frac{Q}{13}\right)$也优于$(12X_2, Q-12X_2)$，再结合表 5，同级也是最优方案.

对$t=5$，与$t=4$类似可证得$Q > Q_5 = 620\,000$时，同级方案$\left(\frac{12Q}{13},\frac{Q}{13}\right)$最优.

故$t=2,4,5$时，结论(1)得证.

对$t=3$，任给$Q \in (13X_2, 13X_3]$，因为$U(Q,t) - V(Q,t)$是关于Q的单调递增函数，所以有$U(Q,3) - V(Q,3) \leqslant U(13X_3,3) - V(13X_3,3)$，而$U(13X_3,3) = h(X_3,3) = h(9\,000,3)$，$V(13X_3,3) = k(3)$，由$h(y,3)$的单调性及表 5 知，$h(9\,000,3) < h(13\,500,3) = k(3)$，故$U(13X_3,3) - V(13X_3,3) = h(9\,000,3) - k(3) < 0$，因此对$Q \in (13X_2, 13X_3]$，总有$U(Q,3) - V(Q,3) < 0$，不存在$Q_3$使得$U(Q,3) - V(Q,3) = 0$，即不存在$Q_3$使得同级方案$\left(\frac{12Q}{13},\frac{Q}{13}\right)$与$(12X_2, Q-12X_2)$缴纳税金相同，而且均有方案$(12X_2, Q-12X_2)$优于同级方案，结合表 5，$(12X_2, Q-12X_2)$也是最优方案.

对$t=6$，与$t=3$情况类似，可证得对$Q \in (13X_5, 13X_6]$，均有方案$(12X_5, Q-12X_5)$优于同级方案$\left(\frac{12Q}{13},\frac{Q}{13}\right)$. 结合定理 3，$(12X_5, Q-12X_5)$也是最优方案. 结论(2)得证.

综上，对$t=2,3\cdots6$，结论均得证.

4.4　最优方案的表示

定理 5　当总奖金$Q \in (13X_{t-1}, 13X_t]$，$t=1,2\cdots6$，对应的最优方案分段表达式为:

(1) $t=1$时，

$$\begin{cases}(Q,0), & 0 \leqslant Q \leqslant 18\,000,\\ (18\,000, Q-18\,000), & 18\,000 < Q \leqslant 19\,500.\end{cases}$$

(2) $t=2$时，

$$\begin{cases}(12X_1, Q-12X_1), & 19\,500 < Q \leqslant 31\,700,\\ \left(\frac{12Q}{13},\frac{Q}{13}\right), & 31\,700 < Q \leqslant 58\,500.\end{cases}$$

(3) $t=3$时，$(12X_2, Q-12X_2)$，$58\,500 < Q \leqslant 117\,000$.

(4) $t=4$时，

$$\begin{cases}(12X_2, Q-12X_2), & 117\,000 < Q \leqslant 121\,500,\\ (12X_3, Q-12X_3), & 121\,500 < Q \leqslant 195\,250,\\ \left(\frac{12Q}{13},\frac{Q}{13}\right), & 195\,250 < Q \leqslant 455\,000.\end{cases}$$

(5) $t=5$时，

$$\begin{cases}(12X_4, Q-12X_4), & 455\,000 < Q \leqslant 620\,000,\\ \left(\frac{12Q}{13},\frac{Q}{13}\right), & 620\,000 < Q \leqslant 715\,000.\end{cases}$$

(6) $t=6$时，$(12X_5, Q-12X_5)$，$715\,000 < Q \leqslant 1\,040\,000$.

(7) 奖金$Q \in (13X_6, +\infty)$，最优方案$(12X_5, Q-12X_5)$，$Q > 1\,040\,000$.

证明　(1) $t=1$时，$0 \leqslant Q \leqslant 13X_1$，即$0 \leqslant Q \leqslant 19\,500$，显然有$0 \leqslant Q \leqslant 18\,000$时，奖金应全部按全年奖发放，应纳税金最小，即发放方案取成$(Q,0)$，应纳税金$T = r_1 Q = 0.03Q$; 当$18\,000 < Q \leqslant 19\,500$时，方案取成$(18\,000, Q-18\,000)$，应纳税金$T = r_1 Q = 0.03Q$，所有奖金均按照最小税率缴税，故缴纳税金最少.

(2) $t=2$时，$13X_1 < Q \leqslant 13X_2$，即$19\,500 < Q \leqslant 58\,500$，$Q_2 = 31\,700$. 由定理 4 可知，当$Q_2 < Q \leqslant 13X_2$，即$31\,700 < Q \leqslant 58\,500$时，$\left(\frac{12Q}{13},\frac{Q}{13}\right)$是最优方案. 当$13X_1 < Q \leqslant Q_2$，即$19\,500 < Q \leqslant 31\,700$时，方案$(12X_1, Q-12X_1)$优于$\left(\frac{12Q}{13},\frac{Q}{13}\right)$. 结合表 5，方案$(12X_1, Q-12X_1)$优于$(0,Q)$，结合定理 2，故$19\,500 < Q \leqslant 31\,700$时，$(12X_1, Q-12X_1)$是最优方案.

(3) $t=3$时，$13X_2 < Q \leqslant 13X_3$，即$58\,500 < Q \leqslant 117\,000$. 由定理 4，此时$(12X_2, Q-12X_2)$优于同级方案. 结合定理 2 及表 5，方案$(12X_2, Q-12X_2)$也优于$(12X_1, Q-12X_1)$和$(0,Q)$，是最优方案.

(4) $t=4$时，$13X_3 < Q \leqslant 13X_4$，即$117\,000 < Q \leqslant 455\,000$. $Q_4 = 195\,250$. 由定理 4，

当$195\,250 < Q \leqslant 455\,000$时，$\left(\frac{12Q}{13},\frac{Q}{13}\right)$是最优方案.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

当 $117\ 000 < Q \leqslant 195\ 250$ 时,$(12X_3, Q-12X_3)$ 优于同级方案.

下面比较方案 $(12X_3, Q-12X_3)$ 和 $(12X_2, Q-12X_2)$.

由表 5,当 $y > 13\ 500$ 时,方案 $(12X_3, Q-12X_3)$ 优于 $(12X_2, Q-12X_2)$,是最优方案.

当 $y < 13\ 500$ 时,方案 $(12X_2, Q-12X_2)$ 优于 $(12X_3, Q-12X_3)$,是最优方案.

分界点 $y = 13\ 500$ 处对应的 Q 可以通过等式 $Q = 12X_3 + 13\ 500$ 解得 $Q = 121\ 500$. 故当 $117\ 000 < Q \leqslant 121\ 500$,最优方案为 $(12X_2, Q-12X_2)$;当 $121\ 500 < Q \leqslant 195\ 250$,最优方案为 $(12X_3, Q-12X_3)$.

(5) $t = 5$ 时,$13X_4 < Q \leqslant 13X_5$,即 $455\ 000 < Q \leqslant 715\ 000$. $Q_5 = 620\ 000$. 由定理 4,

当 $620\ 000 < Q \leqslant 715\ 000$ 时,同级方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 最优;

当 $455\ 000 < Q \leqslant 620\ 000$ 时,$(12X_4, Q-12X_4)$ 优于同级方案. 由表 5,方案 $(12X_4, Q-12X_4)$ 优于 $(12X_3, Q-12X_3)$,结合定理 3,$(12X_4, Q-12X_4)$ 是最优方案.

(6) $t = 6$ 时,$13X_5 < Q \leqslant 13X_6$,即 $715\ 000 < Q \leqslant 1\ 040\ 000$. 由定理 4,此时 $(12X_5, Q-12X_5)$ 优于同级方案. 再结合定理 3 知 $(12X_5, Q-12X_5)$ 是最优方案.

(7) $Q > 13X_6$,即 $Q > 1\ 040\ 000$. 方案 $(12X_6, Q-12X_6)$ 对应的应纳税金 $T = 12X_6 r_6 - s_6 + (Q-12X_6) r_7 - s_7 = 0.45Q - 115\ 010$,同级方案 $\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$ 对应的应纳税金 $T' = Qr_7 - s_7 = 0.45Q - 13\ 505$,显然后者更高,故 $(12X_6, Q-12X_6)$ 优于同级方案. 由表 5,方案 $(12X_5, Q-12X_5)$ 优于 $(12X_6, Q-12X_6)$,再结合定理 3,$(12X_5, Q-12X_5)$ 是最优方案.

定理 5 给出了全年奖的最优方案,为了便于实际使用,通过整理,汇总成下面表格.

表 7 全年奖的最优方案数据表

序号	奖金 Q 所在区间	发放方式(全年奖,当月奖)	(t,n)	最小应纳税金 T
1	[0,18 000]	$(Q,0)$	(1,—)	$T = 0.03Q$
2	(18 000,19 500]	(18 000,Q − 18 000)	(1,1)	$T = 0.03Q$
3	(19 500,22 500]	(18 000,Q − 18 000)	(1,2)	$T = 0.1Q - 1365$
4	(22 500,27 000]	(18 000,Q − 18 000)	(1,3)	$T = 0.2Q - 3615$
5	(27 000,31 700]	(18 000,Q − 18 000)	(1,4)	$T = 0.25Q - 4965$
6	(31 700,58 500]	$\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$	(2,2)	$T = 0.1Q - 210$
7	(58 500,63 000]	(54 000,Q − 54 000)	(2,3)	$T = 0.2Q - 6\ 060$
8	(63 000,89 000]	(54 000,Q − 54 000)	(2,4)	$T = 0.25Q - 9\ 210$
9	(89 000,109 000]	(54 000,Q − 54 000)	(2,5)	$T = 0.3Q - 13\ 660$
10	(109 000,121 500]	(54 000,Q − 54 000)	(2,6)	$T = 0.35Q - 19\ 110$
11	(121 500,143 000]	(108 000,Q − 108 000)	(3,4)	$T = 0.25Q - 6\ 960$
12	(143 000,163 000]	(108 000,Q − 108 000)	(3,5)	$T = 0.3Q - 14\ 110$
13	(163 000,188 000]	(108 000,Q − 108 000)	(3,6)	$T = 0.35Q - 22\ 260$
14	(188 000,195 250]	(108 000,Q − 108 000)	(3,7)	$T = 0.45Q - 41\ 060$
15	(195 250,455 000]	$\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$	(4,4)	$T = 0.25Q - 2\ 010$
16	(455 000,475 000]	(420 000,Q − 420 000)	(4,5)	$T = 0.3Q - 24\ 760$
17	(475 000,500 000]	(420 000,Q − 420 000)	(4,6)	$T = 0.35Q - 48\ 510$
18	(500 000,620 000]	(420 000,Q − 420 000)	(4,7)	$T = 0.45Q - 98\ 510$
19	(620 000,715 000]	$\left(\frac{12Q}{13}, \frac{Q}{13}\right)$	(5,5)	$T = 0.3Q - 5\ 510$
20	(715 000,740 000]	(660 000,Q − 660 000)	(5,6)	$T = 0.35Q - 41\ 260$
21	(740 000,+∞)	(660 000,Q − 660 000)	(5,7)	$T = 0.45Q - 115\ 260$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

例如表中第 10 行，$Q \in (109\,000, 121\,500]$，其中 54 000 按照全年奖发放，对应税率 $r_2 = 0.1$，扣除数 $s_2 = 105$，$Q - 54\,000 \in (55\,000, 67\,500]$ 按照当月奖发，对应税率 $r_6 = 0.35$，扣除数 $s_6 = 5\,505$，所以应纳税金 $T = 54\,000 r_2 - s_2 + (Q - 54\,000) r_6 - s_6 = 0.35Q - 19\,110$.

又如表中第 6 行，$Q \in (34\,050, 58\,500]$，$\frac{Q}{13} \in (2\,619.230\,77, 4\,500]$ 按当月奖发放，对应税率 $r_2 = 0.1$，扣除数 $s_2 = 105$，$\frac{12Q}{13}$ 对应相同税率级，按照全年奖发放. 所以应纳税金 $T = \frac{12Q}{13} r_2 - s_2 + \frac{12Q}{13} r_2 - s_2 = 0.1Q - 210$.

4.5　最优方案与方案 $(Q, 0)$ 的比较

方案 $(Q, 0)$ 即奖金全部按照全年奖发放. 图 5 给出了最优方案、方案 $(Q, 0)$ 的应纳税金以及二者应缴税金的差值. 为了看得更清楚，我们把图 5 中 $[0, 12X_2]$ 部分的图像放大，如图 6 所示.

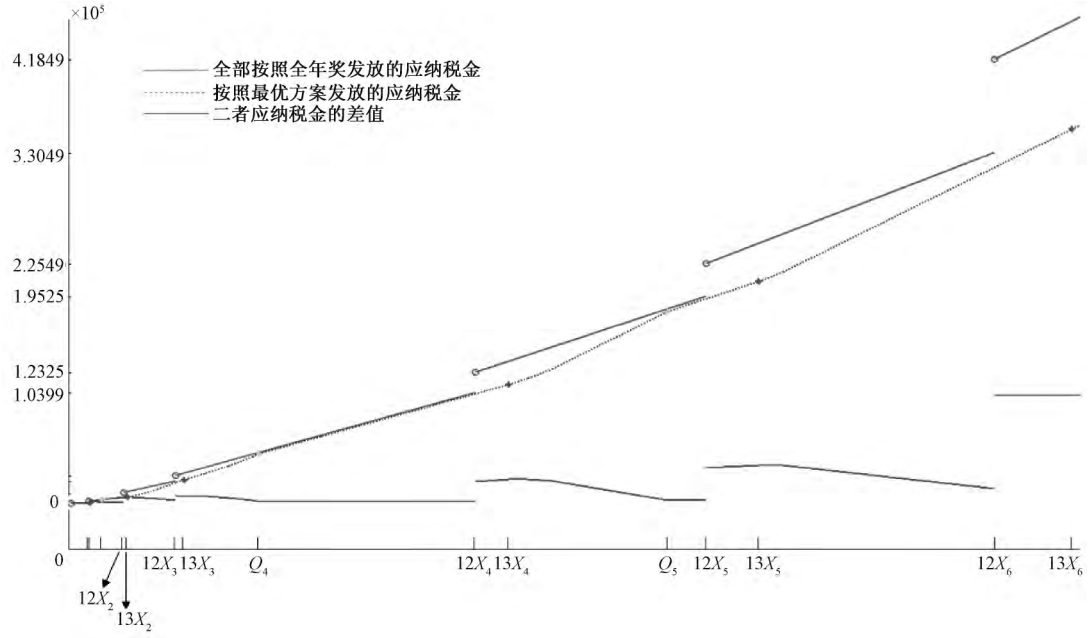


图 5　按照最优方案和方案 $(Q, 0)$ 发放时的应纳税金及二者应纳税金的差值

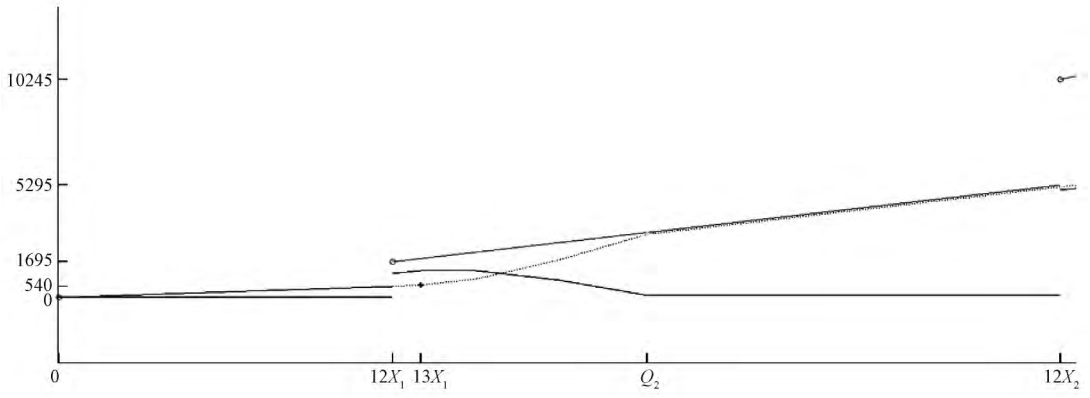


图 6　图 5 中 $[0, 12X_2]$ 上的图像

图 5 中蓝色虚线为最优方案的应纳税金，红色线段为方案 $(Q, 0)$ 的应纳税金，蓝色实线段为二者应缴纳税金的差值. 可以很明显地看出，最优方案要缴纳的税金始终小于 $(Q, 0)$ 的应纳税金，而且在红色出现间断的地方蓝色是平滑的，这种基本呈线性增长的连续发放形式比全部按全年奖发放的间断形

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

式更科学合理.

更进一步,利用表 7 中结论,可以得到最优方案较方案 $(Q,0)$ 税金实际减少量的分布情况,如图 5,图 6 所示. 对 $Q \in (12X_{t-1},12X_t]$,

当 $t=1$,$Q \in [0,18\ 000]$ 时,最优方案和 $(Q,0)$ 的应纳税金相同;

当 $t=2,4,5$,当 $Q > Q_t$,最优方案比 $(Q,0)$ 的应纳税金节省对应的一个扣除数 s_t;但在 $Q < Q_t$ 时,优化空间则较大. $t=2$ 时最多可节省税金 1 260;$t=4$ 时最多可节省税金 7 255;$t=5$ 时最多可节省税金 22 005;

当 $t=3,6$ 时,在整个区间 $(12X_{t-1},12X_t]$ 上优化力度都较大,其中 $t=3$ 时最优方案比 $(Q,0)$ 最多可节省税金 5 505;$t=6$ 时最优方案比 $(Q,0)$ 最多可节省税金 35 755;$t=7$ 时,全年奖大于 960 000 时,节省税金恒定于 101 755.

参 考 文 献

[1] 张海斌,李芳林. 年度奖金个人所得税筹划优化模型的构建及应用研究[J]. 中国管理信息化:会计版,2007(11):18-20.

[2] 贺株莉. 个人所得税纳税优化模型及应用研究[J]. 湖南农业大学学报:社会科学版,2006(5):35-36.

[3] 顾锋娟,岑仲迪. 纳税最优的工资奖金分配方案研究[J]. 数学的实践与认识,2010(40):40-48.

[4] 郜林平. 现行税制下的个人所得税筹划方案[J]. 财会通讯:理财版,2007(2):66-67.

[5] 贾华芳. 年终奖金发放方式的纳税筹划[J]. 财会月刊,2007(5):28-29.

On the Optimal Allocation Scheme of Annual Bonus of Limited Individual Income Tax

Wang Xiaoming Zhu Yixin

(School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract

According to current tax law, China applies seven progressive tax brackets to the different amount of individual income. This paper finds the optimal allocation scheme for annual bonus, and reveals annihilated bonus. The juding rules of the optimal allocation scheme are obtained by mathematical proofs, and the explicit piecewise expressions for the optimal allocation scheme are provided, also a table on the optimal allocation scheme is drawn.

Key words: annual bonus, month bonus, the optimal allocation scheme, individual income tax, tax, after-tax income, annihilated bonus.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net