DOI：10.19789/j.1004-9398.2022.02.002
文献引用：王晴．∏∑-域上一阶线性差分方程的极小万有分母[J]．首都师范大学学报（自然科学版），2022，43（2）：7-13+28. WANG Q. Minimal universal denominators for first-order linear difference equations in ∏∑-fields[J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2022，43（2）：7-13+28.

∏∑-域上一阶线性差分方程的极小万有分母*

王　晴

（天津大学数学学院，天津　300350）

摘要：符号求和的一个关键问题是求解线性差分方程的有理解．解决这类问题的第一步是得到每个有理解分母的界，一旦知道分母界，就可以将有理解的问题简化为多项式解的问题．本文提供了一种用于在∏∑-域中寻找多项式系数一阶线性差分方程有理解的极小万有分母的算法，得到的极小万有分母为根据Abramov算法在∏∑-域上推广得到的万有分母的因子．

关键词：线性差分方程；极小万有分母；Abramov万有分母；∏∑-域
中图分类号：O157.1

Minimal universal denominators for first-order linear difference equations in ∏∑-fields*

WANG Qing

（School of Mathematics，Tianjin University，Tianjin　300350）

Abstract：A key problem of symbolic summation is to solve the rational solution of linear difference equation. The first step in solving it is to obtain the denominator bound of each rational solution. Once the denominator bound is known，the problem of solving rational solutions is reduced to the problem of solving polynomial solutions. This study provides an algorithm for finding a minimal universal denominator of rational solutions for fist-order linear difference equation with polynomial coefficients in ∏∑-fields，and the minimal universal denominator is a factor of universal denominator obtained by the generalization of the Abramov algorithm in ∏∑-fields.

Keywords：linear difference equation；minimal universal denominator；Abramov's universal denominator；∏∑-fields
CLC：O157.1

0　引　言

求多项式系数线性差分方程的有理解在计算机代数中占有重要地位．更准确地说，K是一个域，$a_0(t), a_1(t), \cdots, a_d(t), f(t) \in K(t)$，找到所有满足

$$\sum_{i=0}^{d} a_i(t)g(t+i) = f(t) \tag{1}$$

的有理函数$g(t) \in K(t)$．许多问题都归结于此，比如Gosper算法[1]或者寻找非齐次线性差分方程的超几何解[2]．

解决这类问题的一个通常的方法是估计出

收稿日期：2021-01-11
* 国家自然科学基金项目（11771330）

$g(t)$的分母,从而把这个问题归结到找多项式解.这就引出了万有分母,也就是此分母能够整除每一个方程(1)解的分母.

Abramov[3-4]首先给出了寻找万有分母的第一个算法,这个算法依赖所有的系数$a_0(t), a_1(t), \cdots, a_d(t)$和$f(t)$;Abramov[5]改进了他的算法,改进的算法只需要利用首项系数$a_0(t)$和末项系数$a_d(t)$,此算法得到的万有分母称为Abramov万有分母;Barkatou[6]给出了关于Abramov万有分母在矩阵差分方程中的显式公式;Chen等[7]利用收敛性得到了相同的公式;Hou和Mu[8]利用Gosper算法得到了一阶线性差分方程一个新的万有分母,且这个万有分母是Abramov万有分母的因子.

在差分域的情况下,Karr[9-10]引入了$\prod\sum$-域,并给出了求和算法,允许更一般的求和.在$\prod\sum$-域中求解参数线性差分方程的一个重要应用是简化和证明嵌套的多和表达式和恒等式.Bronstein[11]和Schneider[12-13]给出了在$\prod\sum$-域中计算万有分母的界的算法;Middeke和Schneider[14]将万有分母界的公式[6-7]在给定的差分系统中拓展到$\prod\sum$-域.特别地,将$\prod\sum$-域中分母的界[11-12]由单变量差分方程扩展到耦合系统.本文将文献[8]中得到的极小万有分母推广到$\prod\sum$-域,找到满足

$$\sigma(a_1(t))\sigma(g(t)) + a_2(t)g(t) = f(t) \quad (2)$$

的有理函数$g(t) \in K(t)$的万有分母.

1 万有分母

定义 1.1 $(F(t),\sigma)$称为(F,σ)的$\prod$-扩张,如果:

(1) $(F(t),\sigma)$是一阶线性的;

(2) $\sigma(t) = \alpha t, \alpha \in F^*$.

定义 1.2 差分域(F,σ)的齐次群定义为

$$H_{(F,\sigma)} := \left\{ \frac{\sigma(g)}{g}, g \in F^* \right\}.$$

定义 1.3 $(F(t),\sigma)$是(F,σ)的差分域扩张,定义为$\sigma(t) = \alpha t + \beta, \alpha \in F^*, \beta \in F$. $(F(t),\sigma)$称为(F,σ)的$\sum$-扩张,如果:

(1) $(F(t),\sigma)$是(F,σ)的非齐次扩张;

(2) 对于所有的$n \in Z^*$, 有$\alpha^n \in H_{(F,\sigma)} \Rightarrow \alpha \in H_{(F,\sigma)}$.

定义 1.4 设$\left(F\left(t_1,\cdots,t_n\right),\sigma\right)$是$(F,\sigma)$的差分域扩张.

$\left(F\left(t_1,\cdots,t_n\right),\sigma\right)$称为$(F,\sigma)$的$\prod\sum$-扩张,如果对于所有的$1 \leqslant i \leqslant n$,$\left(F\left(t_1,\cdots,t_i\right),\sigma\right)$是$\left(F\left(t_1,\cdots,t_{i-1}\right),\sigma\right)$的$\prod$-扩张或者$\sum$-扩张.

(F,σ)称为K上的$\prod\sum$-域,如果

$$F = K(t_1,\cdots,t_n), \text{且} \left(K\left(t_1,\cdots,t_n\right),\sigma\right)$$

为(K,σ)的$\prod\sum$-扩张,$\mathrm{Const}_\sigma F = K$.

定义 1.5 令$(F(t),\sigma)$是(F,σ)的$\prod\sum$-扩张,且$f, g \in F[t]^*$.定义f和g的$\mathrm{Spread}_\sigma(f,g)$为

$$\mathrm{Spread}_\sigma(f,g) = \{ h \geqslant 0 | \gcd(f, \sigma^h(g)) \neq 1 \}.$$

命题 1[12] 令$(F(t),\sigma)$是(F,σ)的$\prod\sum$-扩张,且$f, g \in F[t]^*$.则$\mathrm{Spread}_\sigma(f,g)$是有限集合当且仅当$(F(t),\sigma)$是$(F,\sigma)$的$\sum$-扩张,或者$t \nmid \gcd(f,g)$.

本文只考虑Spread_σ有限的情形.

引理 1.1[8] 假设u_0, v_0, u_1, v_1是$K[t]$上的多项式,并且$\gcd(u_0, v_0) = \gcd(u_1, v_1) = 1$,如果$u_0/v_0 + u_1/v_1 \in K[t]$,则$v_0/v_1 \in K$.

假设$u(t)/v(t)$是方程(2)的既约有理解,其中$u, v \in K[t]$,引理1.1表明当写成约减形式的时候,$\sigma(a_1)\sigma(u)/\sigma(v)$和$a_2 u/v$的分母是纯倍数的关系,因此,假设

$$a_1 \frac{u}{v} = \frac{r'(t)}{\sigma^{-1}(s(t))}, a_2 \frac{u}{v} = \frac{r(t)}{s(t)}, \quad (3)$$

其中$\gcd(r(t), s(t)) = \gcd(r'(t), \sigma^{-1}(s(t))) = 1$. $s(t)$是$v(t)$的因子,则可以假设$v(t) = h(t)s(t)$.从而只要找到$h(t)$和$s(t)$的界,即可得到$v(t)$的界.

依据文献[8]中给出的算法,将其推广到$\prod\sum$-域中,给出以下算法:设$\mathrm{Spread}_\sigma(a_1, a_2)$中元素为$m_1 < m_2 < \cdots < m_s$,

$$p_1 = a_1, q_1 = a_2,$$

$$p_{i+1} = \frac{p_i}{d_i}, q_{i+1} = \frac{q_i}{\sigma^{-m_i}(d_i)}, 1 \leqslant i \leqslant s, \quad (4)$$

$$u_{i+1} = u_i \prod_{j=0}^{m_i} \sigma^{-j}(d_i), \quad (5)$$

$$d_i = \gcd(p_i, \sigma^{m_i}(q_i)), \quad (6)$$

令

$$c(t) = \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i} \sigma^{-j}\left(d_i\right), \quad (7)$$

$$u_{s+1} = \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=0}^{m_i} \sigma^{-j}\left(d_i\right). \quad (8)$$

引理 1.2 令$(K(t),\sigma)$是(K,σ)的$\prod\sum$-扩张,K为特征为零的域,多项式$a, b, c, A, B, C \in K[t]$, t

均不整除以上参数,且对于任意的非负整数h满足$\gcd(a(t),c(t))=\gcd(b(t),\sigma(c(t)))=\gcd(A(t),\sigma^h(B(t)))=1$.如果

$$\frac{a(t)}{b(t)}\frac{\sigma(c(t))}{c(t)}=\frac{A(t)}{B(t)}\frac{\sigma(C(t))}{C(t)},\tag{9}$$

则有$c(t)|C(t)$.

证明　令

$$g(t)=\gcd(c(t),C(t)),$$
$$d(t)=c(t)/g(t),$$
$$D(t)=C(t)/g(t),$$

则有

$$\gcd(d(t),D(t))=\gcd(a(t),d(t))=\gcd(b(t),\sigma(d(t)))=1,$$

将式(9)重新写可得

$$A(t)b(t)c(t)\sigma(C(t))=a(t)B(t)C(t)\sigma(c(t)),$$

两边同时消掉$g(t)\sigma(g(t))$,则有

$$A(t)b(t)d(t)\sigma(D(t))=a(t)B(t)D(t)\sigma(d(t)),$$

从而可得

$$d(t)|B(t)\sigma(d(t)),\ \sigma(d(t))|A(t)d(t).$$

重复以上式子可得对任意的k,

$$d(t)|B(t)\sigma(B(t))\cdots\sigma^{k-1}(B(t))\sigma^k(d(t)),$$
$$d(t)|\sigma^{-1}(A(t))\cdots\sigma^{-k}(A(t))\sigma^{-k}(d(t)).$$

因为K为特征为零的域,则对足够大的k有$\gcd(d(t),\sigma^k(d(t)))=\gcd(d(t),\sigma^{-k}(d(t)))=1$,从而可得,$k$足够大时,$d(t)|B(t)\sigma(B(t))\cdots\sigma^{k-1}(B(t))$,$d(t)|\sigma^{-1}(A(t))\cdots\sigma^{-k}(A(t))$,但是这2个多项式是互素的,从而可得$d(t)$为常数.故有$c(t)|C(t)$.

引理1.3　令$(K(t),\sigma)$是(K,σ)的$\prod\sum$-扩张,$0\leqslant k\leqslant i,j\leqslant s, m\in N, m<m_{k+1}$.则有

$$\gcd(p_i(t),\sigma^m(q_j(t)))=1.$$

证明　因为$p_i(t)|a_1(t)$, $q_j(t)|a_2(t)$,则有对任意的m, $\gcd(p_i(t),\sigma^m(q_j(t)))|\gcd(a_1(t),\sigma^m(a_2(t)))$.

如果$m\in N$,但是$m\notin \mathrm{Spread}_\sigma(a_1,a_2)$,则有$\gcd(a_1(t),\sigma^m(a_2(t)))=1$.从而$m\notin \mathrm{Spread}_\sigma(a_1,a_2)$证明成立.

为了证明$m\in \mathrm{Spread}_\sigma(a_1,a_2)$时成立,对$k$做归纳. $\mathrm{Spread}_\sigma(a_1,a_2)$元素为$m_1<m_2<\cdots<m_s$.

$k=0$时,这种情况不用证明,因为没有$m<m_1$.

$k>0$时,假设$m<m_k$时成立.下面去证明$m=m_k$时成立.

因为$p_i(t)|p_k(t)$, $q_j(t)|q_k(t)$,则有$\gcd(p_i(t),\sigma^{m_k}(q_j(t)))|\gcd(p_k(t),\sigma^{m_k}(q_k(t)))$,但是后者$\gcd=1$,所以证明成立.

定理1.1　令$(K(t),\sigma)$是(K,σ)的$\prod\sum$-扩张,K为特征0的域,$r(t)$为K上的非零有理函数.则存在多项式$A(t),B(t),C(t)\in K[t]$, $B(t),C(t)$首项系数为1且

$$r(t)=\frac{A(t)}{B(t)}\cdot\frac{\sigma(C(t))}{C(t)}.$$

其中

(i) $\gcd(A(t),\sigma^m(B(t)))=1$,对每一个非负整数$m$,

(ii) $\gcd(A(t),C(t))=1$,

(iii) $\gcd(B(t),\sigma(C(t)))=1$.

证明　令$r(t)=Z\frac{p(t)}{q(t)}$,其中p、q为K上首项系数为1且互素的多项式.

相对于t,有$\mathrm{Spread}_\sigma(p,q)=\{m\geqslant 0|\gcd(p,\sigma^m(q))\neq 1\}$.根据命题1, $\mathrm{Spread}_\sigma(f,g)$是有限的,当且仅当$(F(t),\sigma)$是$(F,\sigma)$的$\sum$-扩张,或者$t\nmid\gcd(f,g)$.令$m_s$是$\mathrm{Spread}_\sigma(p,q)$的最大值.对于$1\leqslant i\leqslant s$,

$$p_0=p, q_0=q,$$
$$p_i=\frac{p_{i-1}}{d_i},$$
$$q_i=\frac{q_{i-1}}{\sigma^{-m_i}(d_i)},$$
$$d_i=\gcd(p_{i-1},\sigma^{m_i}(q_{i-1})).$$

令

$$A(t):=Zp_s(t),$$
$$B(t):=q_s(t),$$
$$C(t):=\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}\sigma^{-j}(d_i).$$

则有

$$\frac{A(t)}{B(t)}\frac{\sigma(C(t))}{C(t)}=Z\frac{p_s}{q_s}\frac{\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}\sigma^{-j+1}(d_i)}{\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{m_i}\sigma^{-j}(d_i)}=$$

$$Z\frac{p_0}{\prod_{i=1}^{s}d_i}\frac{\prod_{i=1}^{s}\sigma^{-m_i}(d_i)}{q_0}\prod_{i=1}^{s}\frac{d_i}{\sigma^{-m_i}(d_i)}=Z\frac{p_0}{q_0}=Z\frac{p}{q}=r(t).$$

根据p_i、q_i、d_i的定义,

$$\gcd(p_k,\sigma^{m_k}(q_k))=\gcd\left(\frac{p_{k-1}}{d_k},\frac{\sigma^{m_k}(q_k)}{d_k}\right)=1,$$

对所有满足$1\leqslant k\leqslant s$的k.

接下来证明性质(i)(ii)(iii).

(i)引理1.3中设$i=j=s$,可得到$A(t)$和$\sigma^m(B(t))$对每一个非负整数m是互素的.

(ii)如果$A(t)$和$C(t)$有公共因子,则p_s和$\sigma^{-j}(d_i)$对于$1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant m_i$有公因子.从而根据$q_i$的定义,$p_s$和$\sigma^{m_i-j}(q_{i-1})$也有公因子.但是当$1\leqslant m_i-j<m_i$时,这个结论与引理1.3相矛盾.因此$A(t)$和$C(t)$互素.

(iii)如$B(t)$和$\sigma(C(t))$有公因子,则对于$1\leqslant i\leqslant s,1\leqslant j\leqslant m_{i-1}$,$q_s$和$\sigma^{-j}(d_i)$也有公因子.从而根据$p_i$的定义,$q_s$和$\sigma^{-j}(p_{i-1})$也有公因子.因此$\sigma^j(q_s)$和$p_{i-1}$有公因子.但是当$j<m_i$时,这个结论与引理1.3相矛盾.因此$B(t)$和$\sigma(C(t))$互素.

定理1.1也可由文献[15]定理2直接得出.

引理1.4 $s(t)$和$h(t)$被以下分解所界定:

$$\sigma^{-1}(s(t))|c(t),h(t)|\sigma^{-m_1}(d_1)\cdots\sigma^{-m_s}(d_s).$$

证明 由式(3)有

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{r'(t)}{r(t)}\,\frac{s(t)}{\sigma^{-1}(s(t))},$$

根据定理1.1可得

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_{s+1}}{q_{s+1}}\,\frac{\sigma(c(t))}{c(t)}.$$

由引理1.2可得$\sigma^{-1}(s(t))|c(t)$.

因为$v(t)=h(t)s(t)$,而且$\gcd(u(t),v(t))=1$,式(3)表明

$$h(t)|q_1(t),$$
$$h(t)|p_1\sigma^{-1}(s(t)).$$

因此$h(t)|\gcd(q_1(t),p_1(t)c(t))$.另一方面,由引理1.3可得,当$1\leqslant i\leqslant s+1$时,

$$\gcd\left(q_{s+1}(t),\sigma^{-m}\left(p_i(t)\right)\right)=1,\forall m<m_i.$$

因为$d_i(t)$是$p_i(t)$的因子得到

$$\gcd\left(q_{s+1}(t),\prod_{j=0}^{m_i-1}\sigma^{-j}\left(d_i\right)\right)=1.$$

从而表明

$$\gcd\left(q_1(t),p_1(t)c(t)\right)=\sigma^{-m_1}\left(d_1\right)\cdots\sigma^{-m_s}\left(d_s\right).$$

根据引理1.1和引理1.4得到下面的定理.

定理1.2 若$g=u(t)/v(t)$是方程(2)的解,其中$u,v\in K[t]$,且$\gcd(u,v)=1$,则有$v(t)|u_{s+1}$,其中u_{s+1}由式(8)定义.

定理1.2表明u_{s+1}是万有分母.

2 极小性

为了证明u_{s+1}是极小的,需要以下引理:

引理2.1[8] 设$f,g\in A[t]$是2个互素的多项式.则对于任意的多项式$h_1,\cdots,h_r\in A[t]$,存在1个整数M,使得对任意的整数$m>M$,

$$\gcd(h_i,f+mg)=1,i=1,2,\cdots,r.$$

推论2.1[8] 设$f,g\in A[t]$是2个多项式,则对于任意的多项式$c\in A[t]$,存在整数M,使得任意的整数$m>M$,

$$\gcd(c,f+mg)=\gcd(c,f,g).$$

引理2.2 令$(K(t),\sigma)$是(K,σ)的$\prod\sum$-扩张,设$a,b,c\in K[t]$是3个多项式满足$\gcd(a,c)=\gcd(b,c)=1$,则存在多项式$f\in K[t]$使得

$$\gcd(f(t),c(t))=\gcd(f(t),\sigma^{-1}(c(t)))=1$$

和

$$\frac{a(t)f(t)+b(t)\sigma(f(t))}{c(t)}\in K[t].$$

证明 首先证明$c(t)$为以下形式时成立

$$c(t)=p(t)^{\alpha_0}(\sigma(p(t)))^{\alpha_1}\cdots(\sigma^r(p(t)))^{\alpha_r},\quad(10)$$

其中$p(t)$是不可约多项式,$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_r$都是正整数.

令

$$\gamma=\max\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_r\},$$
$$q(t)=(p(t)\sigma(p(t))\cdots\sigma^r(p(t)))^{\gamma}.$$

对于$k=0,\cdots,r+1$,令

$$f_k(t)=$$
$$(-1)^k\sigma^{k-r-2}\left(q(t)\right)\sigma^k\left(q(t)\right)\prod_{i=1}^{r+1-k}\sigma^{-i}\left(a(t)\right)\prod_{i=0}^{k-1}\sigma^i\left(b(t)\right).$$

令$f=\sum_{k=0}^{r+1}f_k(t)$,则f是文中需要的多项式.

事实上,有

$$a(t)f(t)+b(t)\sigma\left(f(t)\right)=a(t)f_0(t)+$$
$$\sum_{k=1}^{r+1}a(t)f_k(t)+b(t)\sigma\left(f_{k-1}(t)\right)+b(t)\sigma\left(f_{r+1}(t)\right)=$$
$$a(t)f_0(t)+b(t)\sigma\left(f_{r+1}(t)\right).$$

注意到$q(t)|f_0(t)$且$q(t)|\sigma(f_{r+1}(t))$,从而得到

$$\frac{a(t)f(t)+b(t)\sigma(f(t))}{c(t)}\in K[t].$$

因为$p(t)$是不可约的,对于任意的整数i,

$$\gcd(\sigma^i(p(t)),\sigma^{i-r-1}(q(t)))=$$

$$\gcd(\sigma^i(p(t)),\sigma^{i+1}(q(t)))=1.$$

如果 $1\leqslant j\leqslant r-i,\sigma^i(p(t))|\sigma^{-j}(a(t))$，则有 $\sigma^{i+j}(p(t))|a(t)$，这与 $\gcd(a(t),c(t))=1$ 矛盾.如果对于 $0\leqslant j\leqslant i,\sigma^i(p(t))|\sigma^j(b(t))$，则有 $\sigma^{i-j}(p(t))|b(t)$.因此，

$$\gcd(\sigma^i(p(t),f_{i+1}(t))=1,-1\leqslant i\leqslant r.$$

对任意的 $-1\leqslant i\leqslant r$，当 $j\neq i+1$ 且 $0\leqslant j\leqslant r+1$ 时，可得到 $\sigma^i(p(t))|f_j(t)$.因此，最终可以得到

$$\gcd(\sigma^i(p(t)),f(t))=1,-1\leqslant i\leqslant r.$$

这就表明

$$\gcd(f(t),c(t))=\gcd(f(t),\sigma^{-1}(c(t)))=1.$$

因此 $f(t)$ 满足条件.

接下来通过对 $c(t)$ 的次数进行归纳，来证明对于一般形式的 $c(t)$，推断是成立的.$c(t)$ 的次数如果是零，则取 $f(t)=1$ 即可.

假设 $c(t)$ 次数>0，如果 $c(t)$ 形式为式(10)已经证明成立.否则存在非常数的多项式 $c_1(t)$ 和 $c_2(t)$ 满足 $c(t)=c_1(t)c_2(t)$，且

$$\gcd(\sigma(c_1(t)),c_2(t))=\gcd((c_1(t)),c_2(t))=\gcd(\sigma^{-1}(c_1(t)),c_2(t))=1.$$

很明显，$c_1(t)$ 和 $c_2(t)$ 的次数都小于 $c(t)$ 的次数.通过归纳，存在 $f_1(t),f_2(t)$ 满足

$$\frac{a(t)\sigma^{-1}(c_2(t))f_1(t)+b(t)\sigma(c_2(t))\sigma(f_1(t))}{c_1(t)}\in K[t],$$

$$\frac{a(t)\sigma^{-1}(c_1(t))f_2(t)+b(t)\sigma(c_1(t))\sigma(f_2(t))}{c_2(t)}\in K[t],$$

而且

$$\gcd(f_1(t),c_1(t)\sigma^{-1}(c_1(t)))=\gcd(f_2(t),c_2(t)\sigma^{-1}(c_2(t)))=1.\tag{11}$$

对于任意的整数 m，设

$$f^{(m)}(t)=c_2(t)\sigma^{-1}(c_2(t))f_1(t)+mc_1(t)\sigma^{-1}(c_1(t))f_2(t).$$

则有

$$\frac{a(t)f^{(m)}(t)+b(t)\sigma(f^{(m)}(t))}{c(t)}=\frac{a(t)\sigma^{-1}(c_2(t))f_1(t)+b(t)\sigma(c_2(t))\sigma(f_1(t))}{c_1(t)}+m\frac{a(t)\sigma^{-1}(c_1(t))f_2(t)+b(t)\sigma(c_1(t))\sigma(f_2(t))}{c_2(t)}\in K[t].$$

根据推论2.1，对于足够大的 m，有

$$\gcd\left(c(t)\sigma^{-1}(c(t)),f^{(m)}(t)\right)=\gcd\begin{pmatrix}c(t)\sigma^{-1}(c(t)),c_2(t)\sigma^{-1}(c_2(t))f_1(t),\\c_1(t)\sigma^{-1}(c_1(t))f_2(t)\end{pmatrix}=\gcd\begin{pmatrix}c_1(t)\sigma^{-1}(c_1(t))c_2(t)\sigma^{-1}(c_2(t)),\\c_2(t)\sigma^{-1}(c_2(t))f_1(t),c_1(t)\sigma^{-1}(c_1(t))f_2(t)\end{pmatrix}\tag{12}$$

将式(12)内部式子的公因子 $c_1(t)\sigma^{-1}(c_1(t))$ 和 $c_2(t)\sigma^{-1}(c_2(t))$ 提取出来，式(12)为

$$\gcd\begin{pmatrix}c_2(t)\sigma^{-1}(c_2(t))\gcd(c_1(t)\sigma^{-1}(c_1(t)),f_1(t)),\\c_1(t)\sigma^{-1}(c_1(t))\gcd(c_2(t)\sigma^{-1}(c_2(t)),f_2(t))\end{pmatrix}\tag{13}$$

根据式(11)，则有

$$\gcd(c_2(t)\sigma^{-1}(c_2(t)),c_1(t)\sigma^{-1}(c_1(t)))=1.$$

因此，对于足够大的 m，$f^{(m)}(t)$ 就是满足条件的多项式.

接下来证明万有分母的极小性.

定理 2.1　令 $(K(t),\sigma)$ 是 (K,σ) 的 $\prod\sum$-扩张，设 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 是关于 t 的多项式.$d_i(t)$ 和 $c(t)$ 分别由式(6)和(7)给定.令

$$v(t)=c(t)\prod_{i=1}^{s}d_i(t)=\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=0}^{m_i}\sigma^{-j}(d_i),$$

则存在多项式 $u(t)$ 满足 $\gcd(u(t),v(t))=1$，而且

$$\sigma(a_1(t))\frac{\sigma(u(t))}{\sigma(v(t))}+a_2(t)\frac{u(t)}{v(t)}\in K[t].$$

证明　已知 $p_1=a_1,q_1=a_2$，由定义可得

$$\frac{q_1(t)}{v(t)}=\frac{q_{s+1}(t)}{\sigma(c(t))},$$

$$\frac{\sigma(p_1(t))}{\sigma(v(t))}=\frac{\sigma(p_{s+1}(t))}{\sigma(c(t))}.$$

根据定理1.1可得到

$$\frac{p_1(t)}{q_1(t)}=\frac{p_{s+1}(t)}{q_{s+1}(t)}\frac{\sigma(c(t))}{c(t)}.$$

且

$$\gcd(q_{s+1}(t),\sigma(c(t)))=\gcd(\sigma(p_{s+1}(t)),\sigma(c(t)))=1.$$

则由引理2.2，存在多项式 $u(t)$ 满足

$$\frac{q_{s+1}(t)u(t)+\sigma(p_{s+1}(t))\sigma(u(t))}{\sigma(c(t))}\in K[t].$$

且有

$$\gcd(u(t),\sigma(c(t)))=\gcd(u(t),c(t))=1.$$

又因为 $v(t)|c(t)\sigma(c(t))$，则有 $\gcd(u(t),v(t))=1$.

3 例 子

在本节中,根据例子可以得出新改进的算法得到的万有分母更优,且其为文献[11]的定理8和文献[12]的定理6.3中根据Abramov算法在$\prod\sum$-域推广得到的万有分母的因子.

例 3.1 $a_1\sigma(g)+a_2g=cf$,其中$a_1=k^5(1+k)^5(1+t)(1+(1+k)t)$, $a_2=-(2+k)(3+k)^2(k+t)(-k+k^2+t)$. 有理函数域$Q(k)(t)$的$\prod\sum$-域$(Q(k)(t),\sigma)$,其中$\sigma(k)=k+1,\sigma(t)=(k+1)t$,注意$(k+1)!=(k+1)k!$是根据$\sigma(t)=(k+1)t$得到.

证明

$$f'=\sigma^{-1}(a_1)=(k-1)^5k^4(k+t)(1+t),$$
$$g'=a_2=-(2+k)(3+k)^2(k+t)(-k+k^2+k),$$
$$\mathrm{Spread}_\sigma(f',g')=\{0,1,2\}.$$

根据文献[11]的定理8中算法,可计算得出

$$d=(t+1)(k+t)^2(k^2-k+t). \tag{14}$$
$$p_1=f',q_1=g',d_1=\gcd(p_1,\sigma^2(q_1))=t+1,$$
$$p_2=\frac{p_1}{d_1}=(k-1)^5k^4(k+t),$$
$$q_2=\frac{q_1}{\sigma^{-2}(d_1)}=-(2+k)(3+k)^2(k+t)k(k-1),$$
$$u_2=\prod_{j=0}^{2}\sigma^{-j}(d_1)=(t+1)(1+t/k)((k^2-k+t)/k(k-1)),$$
$$d_2=\gcd\left(p_2,\sigma\left(q_2\right)\right)=k,$$
$$p_3=\frac{p_2}{d_2}=(k-1)^5k^3(k+t),$$
$$q_3=\frac{q_2}{\sigma^{-1}(d_2)}=-(2+k)(3+k)^2(k+t)k,$$
$$u_3=u_2\prod_{j=0}^{1}\sigma^{-j}(d_2)=(t+1)(1+t/k)(k^2-k+t),$$
$$d_3=\gcd(p_3,\sigma(q_3))=k(k+t),$$
$$u_4=u_3d_3=(t+1)(k+t)^2(k^2-k+t).$$

但根据式(8),$d=\dfrac{(t+1)(k+t)^2(k^2-k+t)}{k^2(k-1)}=(t+1)[1+(k-1)!]^2+k[(k-2)!+1]$,其为式(14)的因子.

$$p_1=f',q_1=g',d_1=\gcd(p_1,q_1)=t+k,$$
$$p_2=\frac{p_1}{d_1}=(k-1)^5k^4(1+t),$$
$$q_2=\frac{q_1}{d_1}=-(2+k)(3+k)^2\left(t-k+k^2\right),$$
$$u_2=d_1=t+k,$$
$$d_2=\gcd(p_2,\sigma(q_2))=1,$$
$$u_3=u_2=t+k,$$
$$d_3=\gcd(p_3,\sigma^2(q_3))=t+1,$$
$$u_4=u_3\prod_{j=0}^{2}\sigma^{-j}\left(d_3\right)=\frac{(t+1)(k+t)^2\left(k^2-k+t\right)}{k^2(k-1)}=(t+1)[1+(k-1)!]^2+k[(k-2)!+1].$$

例 3.2 $a_1\sigma(g)+a_2g=cf$,其中$a_1=k^5(1+k)^5(1+t)(1+(1+k)t)$, $a_2=-(2+k)(3+k)^2(k+t)$. 有理函数域$Q(k(t))$的$\prod\sum$-域$(Q(k)(t),\sigma)$,其中$\sigma(k)=k+1,\sigma(t)=(k+1)t$,注意$(k+1)!=(k+1)k!$是根据$\sigma(t)=(k+1)t$得到.

证明

$$f'=\sigma^{-1}(a_1)=(k-1)^5k^4(k+t)(1+t),$$
$$g'=a_2=-(2+k)(3+k)^2(k+t),$$
$$\mathrm{Spread}_\sigma(f',g')=\{0,1\}.$$

根据文献[11]的定理8中算法,可计算得出

$$d=(t+1)(t+k). \tag{15}$$
$$p_1=f',q_1=g',d_1=\gcd(p_1,\sigma(q_1))=t+1,$$
$$p_2=\frac{p_1}{d_1}=(k-1)^5k^4(k+t),$$
$$q_2=\frac{q_1}{\sigma^{-1}(d_1)}=-(2+k)(3+k)^2k,$$
$$u_2=\prod_{j=0}^{1}\sigma^{-j}\left(d_1\right)=(t+1)\left(1+\frac{t}{k}\right)=\frac{(t+1)(t+k)}{k},$$
$$d_2=\gcd\left(p_2,q_2\right)=k,$$
$$u_3=u_2d_2=(t+1)(t+k).$$

但根据式(8),$d=t+k$,其为式(15)的因子.

$$p_1=f',q_1=g',d_1=\gcd\left(p_1,q_1\right)=t+k,$$
$$p_2=\frac{p_1}{d_1}=(k-1)^5k^4(1+t),$$
$$q_2=\frac{q_1}{d_1}=-(2+k)(3+k)^2,$$
$$u_2=d_1=t+k,$$
$$d_2=\gcd(p_2,\sigma(q_2))=1,$$
$$u_3=u_2\prod_{j=0}^{1}\sigma^{-j}(d_2)=t+k.$$

例 3.3 $a_1\sigma(g)+a_2g=cf$,其中$a_1=(x+1)(x+1+qt)$, $a_2=x(x+t+1)$. 有理函数域有理函数域$Q(x)(t)$的$\prod\sum$-域$(Q(x)(t),\sigma)$,其中$\sigma(x)=x+1,\sigma(t)=qt$.

证明

$$f'=\sigma^{-1}(a_1)=x(x+t),$$
$$g'=a_2=x(x+t+1),$$
$$\mathrm{Spread}_\sigma(f',g')=\{0,t\}.$$

根据文献[11]的定理8中算法,可计算得出

$$d = x(x+t)(x-1+\frac{t}{q})(x-2+\frac{t}{q^2})\cdots(x-t+\frac{t}{q^t}). \tag{16}$$

$$p_1 = f', q_1 = g', d_1 = \gcd\left(p_1, \sigma^t\left(q_1\right)\right) = x + t,$$

$$p_2 = \frac{p_1}{d_1} = x,$$

$$q_2 = \frac{q_1}{\sigma^{-t}(d_1)} = x(x+t+1)/(x-t+\frac{t}{q^t}),$$

$$u_2 = \prod_{j=0}^{t}\sigma^{-j}\left(d_1\right) =$$

$$(x+t)\left(x-1+\frac{t}{q}\right)\left(x-2+\frac{t}{q^2}\right)\cdots\left(x-t+\frac{t}{q^t}\right),$$

$$d_2 = \gcd(p_2, q_2) = x,$$

$$u_3 = u_2 d_2 = x\left(x+t\right)\left(x-1+\frac{t}{q}\right)\left(x-2+\frac{t}{q^2}\right)\cdots\left(x-t+\frac{t}{q^t}\right).$$

但根据式(8), $d = x$,其为式(16)的因子.

$$p_1 = f', q_1 = g', d_1 = \gcd(p_1, q_1) = x,$$

$$p_2 = \frac{p_1}{d_1} = x + t, q_2 = \frac{q_1}{d_1} = x + t + 1,$$

$$u_2 = d_1 = x,\ d_2 = \gcd(p_2, \sigma^t(q_2)) = 1,\ u_3 = u_2\prod_{j=0}^{t}\sigma^{-j}\left(d_2\right) = x.$$

例 3.4　$a_1\sigma(g) + a_2 g = cf$,其中 $a_1 = (x+1)(x+1+t)$, $a_2 = x(x+t+1)$. 有理函数域 $Q(x)(t)$ 的∏∑-域 $(Q(x)(t), \sigma)$,其中 $\sigma(x) = x+1, \sigma(t) = t$.

证明

$$f' = \sigma^{-1}(a_1) = x(x+t),$$

$$g' = a_2 = x(x+t+1),$$

$$\mathrm{Spread}_\sigma(f', g') = \{0, t\}.$$

根据文献[11]的定理8中算法,可计算得出

$$d = (x+t)(x+t-1)\cdots x. \tag{17}$$

$$p_1 = f', q_1 = g', d_1 = \gcd(p_1, \sigma^t(q_1)) = x + t,$$

$$p_2 = \frac{p_1}{d_1} = x, q_2 = \frac{q_1}{\sigma^{-t}(d_1)} = x + t + 1,$$

$$u_2 = \prod_{j=0}^{t}\sigma^{-j}\left(d_1\right) = (x+t)(x+t-1)\cdots x,$$

$$d_2 = \gcd(p_2, q_2) = 1,$$

$$u_3 = u_2 d_2 = (x+t)(x+t-1)\cdots x.$$

但根据式(8), $d = x$,其为式(17)的因子.

$$p_1 = f', q_1 = g', d_1 = \gcd(p_1, q_1) = x,$$

$$p_2 = \frac{p_1}{d_1} = x + t, q_2 = \frac{q_1}{d_1} = x + t + 1,$$

$$u_2 = d_1 = x, d_2 = \gcd(p_2, \sigma^t(q_2) = 1,$$

$$u_3 = u_2\prod_{j=0}^{t}\sigma^{-j}\left(d_2\right) = x.$$

4　结束语

线性差分方程的理论与求解算法在组合数学中有广泛的应用,尤其是组合恒等式的机器证明.计算线性差分方程的各种闭形式解往往可以转化为计算有理函数解问题.通过估计有理函数解的万有分母,即通过估计既约有理解的分母的一个倍式,可以将问题进一步转化为多项式解问题,并最终借助次数估计将问题转化为线性方程组求解问题.给定 (F, σ) 的∏∑-扩张 $(F(t), \sigma)$ 和系数属于 $F(t)$ 的形式为(2)的一阶线性差分方程,在假设Spread可以在 $F[t]$ 中计算且为有限集合的情况下,本文给出了计算其解极小万有分母 $d \in F$ 的算法.但目前为止却无法证明本文中的算法对于高阶线性差分方程的情形适用,对于高阶线性差分方程解的极小万有分母有待于进一步研究.

参 考 文 献

[1] PETKOVŠEK M. A generalization of Gosper's algorithm [J]. Discrete Mathematics, 1994, 134(1/2/3): 125-131.

[2] PETKOVŠEK M. Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients [J]. Journal of Symbolic Computation, 1992, 14(2/3): 243-264.

[3] ABRAMOV S A. Rational solutions of linear differential and difference equations with polynomial coeffcients [J]. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1991, 29: 7-12.

[4] ABRAMOV S A. The denominators of rational solutions to linear difference equations [J]. Programming and Computer Software, 1994, 20(1): 30-33.

[5] ABRAMOV S A. Rational solutions of linear difference and q-difference equations with polynomial coeffcients [J]. In ISSAC95: International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 1995(6): 285-289.

[6] BARKATOU M A. Rational solutions of matrix difference equations: the problem of equivalence and factorization [C]//GEDDES K. In ISSAC 99: International symposium on symbolic and algebraic computation. Vancouver: Association for Computing Machinery, 1999.

[7] CHEN Y C, PAULE P, SAAD H L. Converging to Gosper's algorithm [J]. Advances in Applied Mathematics, 2008, 41(3): 351-364.

(下转第28页)

3 结束语

现实中网络管理者在构建网络过程中,不仅要考虑网络的可扩展性,而且还要充分考虑网络的整体性能.多数情况下并不需要在网络中通告所有的路由更新,只需通告特定的路由更新即可.因此,有必要部署相关路由过滤技术,在充分考虑网络应用场景的情况下做好网络优化工作.

参 考 文 献

[1] 崔北亮.CCNA认证指南(640-802)[M].北京:电子工业出版社,2009.

[2] SOLIE K. CCIE实验指南[M].北京:人民邮电出版社,2010:75-100.

[3] 王隆杰.思科网络实验室CCNP实验指南[M].北京:电子工业出版社,2012.

[4] TEARE D.CCNP ROUTER (642-902)[M].北京:人民邮电出版社,2011.

[5] TEARE D, VACHON B.CCNP ROUTER 300-301[M].北京:人民邮电出版社,2016.

[6] 孙光懿,贾英霞,薛颖.基于OSPF动态路由协议的优化研究[J].首都师范大学学报(自然科学版),2019,40(6):44-51+58.

[7] 王立军.基于域间路由的分布式分组过滤有效性研究[J].软件学报,2012,23(8):2130-2137.

[8] 孙光懿,贾居杰.基于GNS3的BGP路由协议仿真实验设计[J].新疆师范大学学报(自然科学版),2020,39(1):81-88.

[9] 田祎.基于混沌过滤机制的高速无线移动网络路由算法的研究[J].西北大学学报(自然科学版),2016,46(4):525-529.

[10] 贺聿志,章勇,柳斌.多链路BGP接入方法的探讨[J].华中科技大学学报(自然科学版),2016,44(增刊):148-151.

[11] 李道丰,王高才,王志伟,等.标准模型下可证明安全的BGP路由属性保护机制[J].计算机学报,2015,38(4):859-871.

[12] 孙杰.BGP路由策略冲突引发的路由振荡研究[D].成都:电子科技大学,2014.

[13] 林晓东,邢育森,杨义先.一种新的基于数据包路由记录包过滤防火墙设计与实现[J].计算机工程与应用,1998(11):3-5.

[14] 孙光懿.基于GNS3的EIGRP路由设计与实现[J].首都师范大学学报(自然科学版),2019,40(2):16-23.

[15] 宋鹤.浅析如何从路由过滤方面来强化网络管理[J].信息与电脑(理论版),2014(24):70.

[16] 孙光懿.基于访问控制列表技术的仿真实验设计[J].伊犁师范学院学报(自然科学版),2018,12(3):53-58.

(责任编辑:马田田)

(上接第13页)

[8] HOU Q H, MU Y P. Minimal universal denominators for linear difference equations [J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2011, 17(6): 977-986.

[9] KARR M. Summation in finite terms[J]. Journal of the ACM, 1981, 28(2): 305-350.

[10] KARR M. Theory of summation in finite terms [J]. Journal of Symbolic Computation, 1985, 1: 303-315.

[11] BRONSTEIN M. On solutions of linear ordinary difference equations in their coefficient field[J]. Journal of Symbolic Computation, 2000, 29(6): 841-877.

[12] SCHNEIDER C. A collection of denominator bounds to solve parameterized linear difference equations in $\prod\sum$-extensions [J]. Annals of the West University of Timisoara: Mathematics and Computer Science, 2004, 42(2): 163-179.

[13] SCHNEIDER C. Symbolic summation in difference filelds[D]. Austria: Johannes Kepler University Linz, 2001.

[14] MIDDEKE J, SCHNEIDER C. Denominator bounds for systems of recurrence equations using $\prod\sum$-Extensions [M]. Austria: Advances in Computer Algebra, 2018: 149-173.

[15] ABRAMOV S A, BRONSTEIN M, PETKOVŠEK M, et al. On rational and hypergeometric solutions of linear ordinary difference equations in $\prod\sum^{*}$-field extensions [J]. Journal of Symbolic Computation, 2021, 107: 23-66.

(责任编辑:马田田)