DOI:10.19789/j.1004-9398.2018.01.001

共振条件下具有奇异性和无界扰动 Duffing 方程的周期解*(下)

马田田[1] 张铁荟[2] 黄 艳[3]

(1. 首都师范大学,北京 100048; 2. 济宁学院初等教育学院, 山东 曲阜 273165; 3. 枣庄职业学院基础教学部,山东 枣庄 277800)

摘 要

本文研究了共振条件下具有奇异性和无界扰动 Duffing 方程周期解的存在性. 应用相平面分析的方法和连续性定理证明了所给定方程至少存在一个周期解.

关键词: Duffing 方程,周期解,奇异性,连续性定理.

中图分类号: O175. 1

3 相关引理的证明

3.1 引理 2.4 的证明

证明 令 $(x(t),y(t))$ 表示方程(6) 经过初始点 (x_0,y_0) 的解,其中 $x_0 = r_0\cos\theta_0$, $y_0 = \frac{n}{2}r_0\sin\theta_0$.

由条件 (h_i') $(i = 1,2)$ 和 (h_4) 可知存在一个正常数 M 使得 $F(x) + M > 0$, $x \in (-1, +\infty)$. 记

$$\eta(t) = \sqrt{y^2(t) + 2F(x(t)) + M}.$$

则

$$\eta'(t) = \frac{\lambda p(t)\, y(t)}{\sqrt{y^2(t) + 2F(x(t)) + M}}.$$

因此, 对任意 $t,s \in [0,2\pi]$,

$$|\eta(t) - \eta(s)| \leqslant \upsilon = \int_0^{2\pi} |p(t)|\, dt.$$

进而可得

$$\eta(0) - \upsilon \leqslant u(t) \leqslant u(0) + \upsilon, t \in [0,2\pi].$$

由此可知

$$\sqrt{2F(c) + M} - \upsilon \leqslant u(t) \leqslant \sqrt{2F(c) + M} + \upsilon,$$
$$t \in [0,2\pi].$$

由于当 $x > 0$ 充分大时,$F(x)$ 是严格递增的, 故对充分大的正数 c, 存在 $a = a(c)$, $b = b(c)$ $(0 < a < c < b)$ 使得

$$\sqrt{2F(c) + M} - \upsilon = \sqrt{2F(a) + M},$$

$$\sqrt{2F(c) + M} + \upsilon = \sqrt{2F(b) + M}.$$

从而有

$$\sqrt{2F(a) + M} \leqslant u(t) \leqslant \sqrt{2F(b) + M}, t \in [0,4\pi] \tag{8}$$

及

$$\sqrt{2F(b) + M} - \sqrt{2F(a) + M} = 2\upsilon.$$

由此可知存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$b - a = \frac{2\upsilon\sqrt{2F(\xi) + M}}{F'(\xi)} = \frac{4\upsilon\sqrt{n^2\xi^2 + 8G(\xi) + 4M}}{n^2\xi + 4g(\xi)}.$$

由条件 (h_4) 和 (h_5) 可知存在正常数 ζ 使得当 $c > 0$ 充分大时,

$$|b - a| \leqslant \zeta. \tag{9}$$

进而有

$$|c - a| \leqslant \zeta, |b - c| \leqslant \zeta. \tag{10}$$

由(8) 可知

$$2F(a) \leqslant y^2(t) + 2F(x(t)) \leqslant 2F(b), t \in [0,2\pi]. \tag{11}$$

根据(11) 可得 $F(x(t)) \leqslant F(b)$, $t \in [0,2\pi]$. 由于当 $x > 0$ 充分大时,$F(x)$ 是递增的, 故当 $\cos\theta(t) \geqslant 0$ 且 c 充分大时,

$$0 \leqslant x(t) = r(t)\cos\theta(t) \leqslant b, t \in [0,2\pi].$$

由 (11) 式进一步可知

$$n^2a^2 + 8G(a) \leqslant 4y^2(t) + n^2x^2(t) + 8G(x(t)) \leqslant n^2b^2 + 8G(b), t \in [0,2\pi].$$

因此,

收稿日期: 2016-09-19

* 国家自然科学基金青年基金(11501381) 资助项目.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$n^2a^2 + 8G(a) \leqslant n^2r^2(t) + 8G(r(t)\cos\theta(t)) \leqslant n^2b^2 + 8G(b), t \in [0,2\pi].$$

进而有

$$a^2 + \frac{8}{n^2}[G(a) - G(r(t)\cos\theta(t))] \leqslant r^2(t) \leqslant b^2 + \frac{8}{n^2}[G(b) - G(r(t)\cos\theta(t))], \quad t \in [0,2\pi]. \tag{12}$$

由条件(h_4)和(h_5)可知对任意 $\varepsilon > 0$,存在正常数 c_1, c_2 使得当 $x \in [0, +\infty)$ 时,

$$-c_1 \leqslant G(x) \leqslant \varepsilon x^2 + c_2.$$

从而当 $t \in [0,2\pi]$ 且 $\cos\theta(t) \geqslant 0$ 时,

$$-c_1 \leqslant G(r(t)\cos\theta(t)) \leqslant \varepsilon r^2(t) + c_2. \tag{13}$$

由(12)和(13)可得

$$a^2 + \frac{8G(a)}{n^2} - \frac{8}{n^2}(\varepsilon b^2 + c_2) \leqslant r^2(t) \leqslant b^2 + \frac{8G(b)}{n^2} + \frac{8}{n^2}(\varepsilon b^2 + c_2), t \in [0,2\pi]. \tag{14}$$

根据(9),(14)和(h_5)可知存在 $0 < \mu_1 < 1$, $0 < \mu_2 < 1$ 使得当 $\cos\theta(t) \geqslant 0$ 且 $c > 0$ 充分大时,

$$(1-\mu_1)a^2 \leqslant r^2(t) \leqslant (1+\mu_2)b^2, t \in [0,2\pi].$$

结合(10)式可知存在常数 $\gamma > 1$,使得对充分大的 $c > 0$,当 $\cos\theta(t) \geqslant 0$, $(r_0\cos\theta_0, \frac{n}{2}r_0\sin\theta_0) \in \Gamma_c$,不等式

$$\frac{c}{\gamma} \leqslant r(t) \leqslant \gamma c, t \in [0,2\pi]$$

成立.

3.2 引理 2.5 的证明

证明 由[15]中的结果可知当 $c \to +\infty$ 时,估计式

$$t_2 - t_1 = o(1)$$

对任意 $(x_0, y_0) \in \Gamma_c$ 一致成立. 下面,我们将给出 $t_2 - t_1$ 的更精确估计. 为此,仍用引理 2.4 中的记号. 令

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{4}n^2x + g(x), x \in (-1, +\infty).$$

不失一般性,假定

$$f(x) < 0, x \in (-1,0).$$

由条件(h'_1)和(h_4)可知当 $x \in (-1,0)$ 时,$F(x)$ 是严格递减的. 另一方面,由条件(h'_2)和(h_4)可知

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty, \lim_{x\to-1^+} F(x) = +\infty.$$

因此,对任意充分大的 $c > 0$,存在唯一的 $d(c) \in (-1,0)$ 使得

$$F(d(c)) = F(c).$$

从而,存在 $-1 < d(b) < d(a) < 0$ 使得

$$F(d(a)) = F(a), F(d(b)) = F(b),$$

这里 a 和 b 是引理 2.4 中给出的常数. 从(11)可以得到

$$2F(d(a)) \leqslant y^2(t) + 2F(x(t)) \leqslant 2F(d(b)), \quad t \in [0,2\pi].$$

故有

$$2(F(d(a)) - F(x(t))) \leqslant y^2(t) \leqslant 2(F(d(b)) - F(x(t))). \tag{15}$$

设 $t_a, t_* \in [t_1, t_2]$ 满足 $t_a < t_*$, $x(t_a) = d(a)$, $y(t_a) \leqslant 0$,且 $-1 < x(t_*) < 0$, $y(t_*) = 0$. 下面,我们分别估计 $t_a - t_1$ 和 $t_* - t_a$. 根据(15)可知当 $t \in [t_1, t_a]$ 时,

$$\sqrt{2(F(d(a)) - F(x(t)))} \leqslant -x'(t) \leqslant \sqrt{2(F(d(b)) - F(x(t)))}.$$

从而

$$\int_{d(a)}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2(F(d(b)) - F(x))}} \leqslant t_a - t_1 \leqslant \int_{d(a)}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2(F(d(a)) - F(x))}}. \tag{16}$$

记

$$I_1 = \int_{d(a)}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2(F(d(a)) - F(x))}} = \int_{d(a)}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2(F(a) - F(x))}},$$

$$I_2 = \int_{d(b)}^{d(a)} \frac{dx}{\sqrt{2(F(d(b)) - F(x))}} = \int_{d(b)}^{d(a)} \frac{dx}{\sqrt{2(F(b) - F(x))}}.$$

接下来,我们分别估计 I_1 和 I_2. 因为 $g(x)$ 是局部李普西茨连续的,所以 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上几乎处处可导并且 $g'(x)$ 在 $(-1,0)$ 的任一个闭子区间上勒贝格可积. 由 I_1 的表达式可知

$$F(a)I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{d(a)}^{0} \frac{F(a)\,dx}{\sqrt{F(a) - F(x)}}.$$

由[3]的结果可知

$$F(a)I_1 = \sqrt{2}\int_{d(a)}^{0} P(x)\sqrt{F(a) - F(x)}\,dx,$$

这里

$$P(x) = \frac{1}{2} + W'(x),$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$W(x) = \frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{\frac{1}{8}n^2x^2 + G(x)}{\frac{1}{4}n^2x + g(x)}, x \in (-1,0).$$

因此,

$$\sqrt{F(a)}I_1 = \sqrt{2}\int_{d(a)}^{0} P(x)\sqrt{1-\frac{F(x)}{F(a)}}dx.$$

显然, $W(0) = 0$. 根据条件 (h'_3) 可得

$$\lim_{x\to -1^+} W(x) = 0.$$

由勒贝格控制收敛定理和 $\lim_{a\to+\infty} d(a) = -1$ 可得

$$\lim_{a\to+\infty}\sqrt{F(a)}I_1 = \lim_{a\to+\infty}\sqrt{2}\int_{d(a)}^{0} P(x)\sqrt{1-\frac{F(x)}{F(a)}}dx$$
$$= \sqrt{2}\int_{-1}^{0} P(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

从而有

$$I_1 = \sqrt{\frac{1}{2F(a)}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{F(a)}}\right), a\to+\infty.$$

因为 $F(a) = \frac{1}{8}n^2a^2 + G(a)$, 所以,

$$I_1 = \frac{2}{na} + o\left(\frac{1}{a}\right), a\to+\infty.$$

又由于 $a < c < b$ 且 $|b-a| \leqslant \zeta$, 故

$$I_1 = \frac{2}{nc} + o\left(\frac{1}{c}\right), c\to+\infty. \tag{17}$$

根据 I_2 的表达式可知

$$F(b)I_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{d(b)}^{d(a)} \frac{F(b)\,dx}{\sqrt{F(b)-F(x)}}.$$

从而

$$F(b)I_2 = \sqrt{2}\int_{d(b)}^{d(a)} P(x)\sqrt{F(b)-F(x)}\,dx -$$
$$\sqrt{2(F(b)-F(a))}\frac{F(d(a))}{2f(d(a))}.$$

这样,我们得到

$$\sqrt{F(b)}I_2 = \sqrt{2}\int_{d(b)}^{d(a)} P(x)\sqrt{1-\frac{F(x)}{F(b)}}dx -$$
$$\sqrt{2\left(1-\frac{F(a)}{F(b)}\right)}\frac{F(d(a))}{2f(d(a))}.$$

因为 $a = a(c) < c < b = b(c)$, $|b-a| \leqslant \zeta$ 并且 $\lim_{c\to+\infty} a(c) = +\infty$, $\lim_{c\to+\infty} b(c) = +\infty$, $\lim_{a\to+\infty} d(a) = -1$, $\lim_{b\to+\infty} d(b) = -1$, 所以从条件$(h'_3)$ 可推得

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{F(d(a))}{f(d(a))} = \lim_{c\to+\infty}\frac{n^2d^2(a)+8G(d(a))}{2n^2d(a)+8g(d(a))} = 0. \tag{18}$$

根据条件 (h_5) 可得

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{F(a)}{F(b)} = \lim_{c\to+\infty}\frac{n^2a^2+8G(a)}{n^2b^2+8G(b)} = 1. \tag{19}$$

从而,根据(18) 和(19) 可得

$$\lim_{c\to+\infty}\sqrt{F(b)}I_2 = \lim_{c\to+\infty}\sqrt{2}\int_{d(b)}^{d(a)} P(x)\sqrt{1-\frac{F(x)}{F(b)}}dx -$$
$$\lim_{c\to+\infty}\sqrt{2\left(1-\frac{F(a)}{F(b)}\right)}\frac{F(d(a))}{2f(d(a))} = 0.$$

进而,当 $c\to+\infty$ 时,

$$I_2 = \int_{d(b)}^{d(a)} \frac{dx}{\sqrt{2(F(b)-F(x))}}$$
$$= o\left(\frac{1}{\sqrt{F(b)}}\right) = o\left(\frac{1}{c}\right). \tag{20}$$

根据(17) 可知当 $c\to+\infty$ 时,

$$\int_{d(b)}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2(F(d(b))-F(x))}}$$
$$= \int_{d(b)}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2(F(b)-F(x))}}$$
$$= \frac{2}{nc} + o\left(\frac{1}{c}\right), c\to+\infty.$$

结合(20) 可得

$$\int_{d(a)}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2(F(d(b))-F(x))}} = \frac{2}{nc} + o\left(\frac{1}{c}\right), c\to+\infty. \tag{21}$$

由 (16) , (17) 和 (21) 可知当 $c\to+\infty$, 估计式

$$t_a - t_1 = \frac{2}{nc} + o\left(\frac{1}{c}\right) \tag{22}$$

对于任意 $(x_0,y_0) \in \Gamma_c$ 和 $\lambda \in [0,1]$ 一致成立. 接下来估计 $t_* - t_a$. 因为 $x'(t_*) = y(t_*) = 0$, 所以对于 $t \in (t_a,t_*)$,

$$\int_t^{t_*} x''(s)x'(s)\,ds = -\int_t^{t_*} f(x(s))x'(s)\,ds +$$
$$\int_t^{t_*} p(s)x'(s)\,ds,$$

由此可得

$$x^2(t) = 2(F(x(t_*)) - F(x(t))) - 2\int_t^{t_*} p(s)x'(s)\,ds$$
$$\geqslant 2(F(x(t_*)) - F(x(t))) +$$
$$2\|p\|_\infty(x(t_*) - x(t)),$$

这里 $\|p\|_\infty = \max\{|p(t)| : t \in [0,2\pi]\}$. 因此, 对于 $t \in (t_a,t_*)$,

$$-x'(t) \geqslant$$
$$\sqrt{2(F(x(t_*)) - F(x(t))) + 2\|p\|_\infty(x(t_*) - x(t))}.$$

进而,

$$-\frac{x'(t)}{\sqrt{2(F(x(t_*)) - F(x(t))) + 2\|p\|_\infty(x(t_*) - x(t))}}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\geqslant 1$.

积分可得

$$\int_{x_*}^{d(a)} \frac{dx}{\sqrt{2(F(x_*)-F(x))+2\|p\|_\infty(x_*-x)}} \geqslant t_*-t_a, \tag{23}$$

其中 $x_*=x(t_*)$. 因为 $\lim\limits_{c\to+\infty} d(a)=-1$, $\lim\limits_{c\to+\infty} d(b)=-1$ 且 $d(b)\leqslant x_*\leqslant d(a)$, 所以 $\lim\limits_{c\to+\infty}(d(a)-x_*)=0$. 同时存在 $a\leqslant x^*\leqslant b$ 使得 $x_*=d(x^*)$, $F(x^*)=F(x_*)$. 应用类似于估计 I_2 的方法可证

$$\int_{x_*}^{d(a)} \frac{dx}{\sqrt{2(F(x_*)-F(x))+2\|p\|_\infty(x_*-x)}} = o\left(\frac{1}{c}\right), c\to+\infty.$$

结合(23)得到

$$t_*-t_a=o\left(\frac{1}{c}\right), c\to+\infty. \tag{24}$$

由(22)和(24)可知当 $c\to+\infty$ 时, 估计式

$$t_*-t_1=\frac{2}{nc}+o\left(\frac{1}{c}\right)$$

关于任意 $(x_0,y_0)\in\Gamma_c$ 和 $\lambda\in[0,1]$ 一致成立. 类似可得

$$t_2-t_*=\frac{2}{nc}+o\left(\frac{1}{c}\right), c\to+\infty.$$

因此,估计式

$$t_2-t_1=\frac{4}{nc}+o\left(\frac{1}{c}\right), c\to+\infty$$

关于任意 $(x_0,y_0)\in\Gamma_c$ 和 $\lambda\in[0,1]$ 一致成立.

3.3 引理 2.6 的证明

证明 定义 $W:(-1,+\infty)\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$W(x,y)=\frac{1}{2}y^2+F(x)+\|p\|_\infty x,$$

其中 $F(x)=\frac{1}{8}n^2x^2+G(x)$. 记

$$W(t)=\frac{1}{2}y^2(t)+F(x(t))+\|p\|_\infty x(t).$$

设 $t_*\in(t_1,t_2)$ 满足 $x(t_*)=\max\{x(t)\mid t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$. 则

$$y(t_*)=0; y(t)\geqslant 0, t\in(t_1,t_*);$$
$$y(t)\leqslant 0, t\in(t_*,t_2).$$

因此,对于 $t\in(t_1,t_*)$, 有

$$W'(t)=(\lambda p(t)+\|p\|_\infty)y(t)\geqslant 0.$$

从而 $W(t)$ 在区间 (t_1,t_*) 上是递增的. 于是, 当 $t\in(t_1,t_*)$ 时,

$$w(t)\leqslant w(t_*),$$

由此可知

$$y^2(t)\leqslant 2(F(x(t_*))-F(x(t)))+2\|p\|_\infty(x(t_*)-x(t)).$$

这样,当 $t\in(t_1,t_*)$ 时,

$$x'(t)\leqslant \sqrt{2(F(x(t_*))-F(x(t)))+2\|p\|_\infty(x(t_*)-x(t))}.$$

进而,

$$\frac{x(t)}{\sqrt{2(F(x(t_*))-F(x(t)))+2\|p\|_\infty(x(t_*)-x(t))}}\leqslant 1.$$

在区间 (t_1,t_*) 上积分上述不等式可得

$$\int_0^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2(F(x_*)-F(x))+2\|p\|_\infty(x_*-x)}} \leqslant t_*-t_1,$$

这里 $x_*=x(t_*)$. 由条件(h_5)可推知当 $x_*\to+\infty$ 时,

$$\int_0^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2(F(x_*)-F(x))+2\|p\|_\infty(x_*-x)}} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{4}n^2(1-s^2)+o(1)}} = \frac{\pi}{n}+o(1). \tag{25}$$

下面定义 $\tilde{W}:(-1,+\infty)\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$\tilde{W}(x,y)=\frac{1}{2}y^2+F(x)-\|p\|_\infty x.$$

记

$$\tilde{W}(t)=\frac{1}{2}y^2(t)+F(x(t))-\|p\|_\infty x(t).$$

则当 $t\in(t_1,t_*)$ 时,

$$\tilde{W}'(t)=(\lambda p(t)-\|p\|_\infty)y(t)\leqslant 0.$$

因此, $\tilde{W}(t)$ 在区间(t_1,t_*)上是递减的. 从而当 $t\in(t_1,t_*)$ 时,有

$$\tilde{W}(t)\geqslant\tilde{W}(t_*),$$

由此可知当 $t\in(t_1,t_*)$ 时,

$$y^2(t)\geqslant 2(F(x(t_*))-F(x(t)))-2\|p\|_\infty(x(t_*)-x(t)).$$

进而,

$$x'(t)\geqslant \sqrt{2(F(x(t_*))-F(x(t)))-2\|p\|_\infty(x(t_*)-x(t))}.$$

因此,

$$\frac{x(t)}{\sqrt{2(F(x(t_*))-F(x(t)))-2\|p\|_\infty(x(t_*)-x(t))}}\geqslant 1.$$

在区间 (t_1,t_*) 上积分上述不等式可得

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\int_0^{x_*}\frac{dx}{\sqrt{2(F(x_*)-F(x))-2\|p\|_\infty(x_*-x)}}\geqslant t_*-t_1. \tag{26}$$

因为当 $x_*\to+\infty$ 时,

$$\int_0^{x_*}\frac{dx}{\sqrt{2(F(x_*)-F(x))-2\|p\|_\infty(x_*-x)}}=\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{4}n^2(1-s^2)+o(1)}}=\frac{\pi}{n}+o(1). \tag{27}$$

所以,

$$t_*-t_1=\frac{\pi}{n}+o(1).$$

类似可得

$$t_2-t_*=\frac{\pi}{n}+o(1).$$

因此,当 $x_*\to+\infty$ 时,

$$t_2-t_1=\frac{2\pi}{n}+o(1).$$

根据引理 2.4 可知

$$\frac{c}{\gamma}\leqslant r(t_*)=x_*\leqslant\gamma c. \tag{28}$$

从而当 $c\to+\infty$ 时,

$$t_2-t_1=\frac{2\pi}{n}+o(1).$$

由条件 (h_4) 可知对于任何充分大的常数 $A>0$, 存在 $a>0$ 使得

$$g(x)\geqslant A,\quad x\geqslant a.$$

记

$$\int_0^{x_*}\frac{dx}{\sqrt{2(F(x_*)-F(x))-2\|p\|_\infty(x_*-x)}}=J_1+J_2,$$

这里

$$J_1=\int_0^{a}\frac{dx}{\sqrt{2(F(x_*)-F(x))-2\|p\|_\infty(x_*-x)}},$$

$$J_2=\int_a^{x_*}\frac{dx}{\sqrt{2(F(x_*)-F(x))-2\|p\|_\infty(x_*-x)}}.$$

下面分别估计 J_1 和 J_2. 首先,易知当 $x_*\to+\infty$ 时,

$$\begin{aligned}J_1&=\int_0^{a}\frac{dx}{\sqrt{2(F(x_*)-F(x))-2\|p\|_\infty(x_*-x)}}\\&=\int_0^{a}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}n^2(x_*^2-x^2)+2(G(x_*)-G(x))-2\|p\|_\infty(x_*-x)}}\\&=\int_0^{a}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}n^2x_*^2(1+o(1))}}=\frac{2a}{nx_*}+o\left(\frac{1}{x_*}\right).\end{aligned} \tag{29}$$

对于 $x\in(a,x_*)$, 有

$$\begin{aligned}&2(F(x_*)-F(x))-2\|p\|_\infty(x_*-x)\\&\geqslant\frac{1}{4}n^2(x_*^2-x^2)+2(A-\|p\|_\infty)(x_*-x).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}J_2&\leqslant\int_a^{x_*}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}n^2(x_*^2-x^2)+2(A-\|p\|_\infty)(x_*-x)}}\\&=\int_{\frac{a}{x_*}}^1\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4}n^2(1-t^2)+\frac{B(1-t)}{x_*}}},\end{aligned}$$

其中 $B=2(A-\|p\|_\infty)$. 由函数 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 在 $x=0$ 的傅里叶展开式可得

$$\int_{\frac{a}{x_*}}^1\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4}n^2(1-t^2)+\frac{B(1-t)}{x_*}}}=\int_{\frac{a}{x_*}}^1\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}n^2(1-t^2)}}\left(1-\frac{2B}{n^2x_*}\frac{1}{1+t}+o\left(\frac{1}{x_*}\right)\right)dt.$$

通过直接计算可以得到

$$\int_{\frac{a}{x_*}}^1\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4}n^2(1-t^2)}}=\frac{\pi}{n}-\frac{2}{n}\arcsin\frac{a}{x_*},$$

和

$$\int_{\frac{a}{x_*}}^1\frac{dt}{(1+t)\sqrt{\frac{1}{4}n^2(1-t^2)}}\geqslant\frac{1}{2}\int_{\frac{a}{x_*}}^1\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4}n^2(1-t^2)}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}-\frac{2}{n}\arcsin\frac{a}{x_*}\right).$$

因为 $x\leqslant\arcsin x$, $x\in[0,1]$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, 所以

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$J_2 \leqslant \frac{\pi}{n} - \frac{2a}{nx_*} - \frac{B\pi}{n^3 x_*} + o\left(\frac{1}{x_*}\right). \tag{30}$$

根据(26),(29) 和(30),我们得到

$$t_* - t_1 \leqslant \frac{\pi}{n} - \frac{B\pi}{n^3 x_*} + o\left(\frac{1}{x_*}\right).$$

类似地可得

$$t_2 - t_* \leqslant \frac{\pi}{n} - \frac{B\pi}{n^3 x_*} + o\left(\frac{1}{x_*}\right).$$

因此,当 $x_* \to +\infty$ 时,

$$t_2 - t_1 \leqslant \frac{2\pi}{n} - \frac{2B\pi}{n^3 x_*} + o\left(\frac{1}{x_*}\right). \tag{31}$$

由于 $B = 2(A - \|p\|_\infty)$ 而 A 是一个可任意大的常数,故由(28) 和(31) 可知对任意充分大的 $\alpha > 0$,存在 $c_0 > 0$ 使得对任意 $c \geqslant c_0$,有

$$t_2 - t_1 \leqslant \frac{2\pi}{n} - \frac{\alpha}{c}.$$

4 定理 1.1 的证明

证明 我们将应用引理 2.1 来证明定理 1.1. 为此,只需证明存在一个正常数 ζ 使得若 $x(t)$ 是方程(5) 的一个 2π 周期解,则有

$$x(t) \leqslant \xi, \quad t \in [0,2\pi]. \tag{32}$$

假定存在方程(5) 的一个 2π 周期解序列 $\{x_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $\|x_k\|_\infty \to +\infty$,当 $k \to +\infty$. 记 $y_k(t) = x_k(t)$. 则 $(x_k(t), y_k(t))$ 是系统(2.2) 的 2π 周期解. 由引理 2.2 可知当 $k \to \infty$ 时,$\zeta(x_k(t), y_k(t)) \to +\infty$ 对 $t \in [0,2\pi]$ 一致成立. 根据引理 2.3,对充分大的 k 有 $\theta'_k(t) < 0, t \in [0,2\pi]$. 因此,$(x_k(t), y_k(t))$ 围绕原点顺时针转动. 假设 $(x_k(t), y_k(t))$ 在 $[0,2\pi]$ 内围绕原点转动 j(j 的值与 k 有关) 圈. 这样,存在 $0 \leqslant t_1^k < t_2^k < \cdots < t_{2j}^k < t_{2j+1}^k = t_1^k + 2\pi, 0 \leqslant t_1^k \leqslant 2\pi$,使得

$$x_k(t_i^k) = 0, i = 1,2,\cdots,2j;$$
$$x_k(t) \geqslant 0, t \in [t_{2i-1}^k, t_{2i}^k];$$
$$x_k(t) \leqslant 0, t \in [t_{2i}^k, t_{2i+1}^k], i = 1,\cdots,j.$$

令 $\alpha(>5)$ 是一个固定常数. 由引理 2.6 可知当 k 充分大时,

$$0 < t_{2i}^k - t_{2i-1}^k < \frac{2\pi}{n} - \frac{\alpha}{c_k}, i = 1,2,\cdots,j, \tag{33}$$

其中 c_k 满足 $F(c_k) = \frac{1}{2}y_k^2(0) + F(x_k(0))$,$\lim\limits_{k\to\infty} c_k = +\infty$. 同时,由引理 2.5 可知对充分大的 k,

$$0 < t_{2i+1}^k - t_{2i}^k < \frac{4}{nc_k} + \frac{1}{c_k}, i = 0,1,2,\cdots,j-1. \tag{34}$$

根据(33) 和(34),对于充分大的 k,

$$2\pi = (t_2^k - t_1^k) + (t_3^k - t_k^2) + \cdots + (t_{2j+1}^k - t_{2j}^k) < j\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{\alpha}{c_k}\right) + j\left(\frac{4}{nc_k} + \frac{1}{c_k}\right) < \frac{2j\pi}{n}.$$

由此可知 $j > n$. 另一方面,由引理 2.5 和引理 2.6 可得

$$2\pi = (t_2^k - t_1^k) + (t_3^k - t_2^k) + \cdots + (t_{2j+1}^k - t_{2j}^k) > j\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{n(n+1)}\right) + j\left(\frac{4}{nc_k} - \frac{1}{c_k}\right) > \frac{2j\pi}{n+1}.$$

故有 $j < n+1$. 由于 j 是一个正整数,故这是一个矛盾. 至此,我们证明了存在一个正常数 ξ 使得(32) 成立. 根据引理 2.1,方程(2′) 至少存在一个 2π 周期解,从而方程(2) 至少存在一个 2π 周期解.

参 考 文 献

[1] Boscaggin A, Fonda A, Garrione M. A multiplicity result for periodic solutions of second order differential equations with a singularity[J]. Nonlinear Anal., 2012,75: 4457 – 4470.

[2] Bonheure D, Fabry C, Smets D. Periodic solutions of forced isochronous oscillator at resonance[J]. Discrete Contin Dynam Systems, 2002,8: 907 – 930.

[3] Capietto A, Dambrosio W, Liu B. On the boundedness of solutions to a nonlinear singular oscillator[J]. Z Angew Math Phys, 2009,60: 1007 – 1034.

[4] Pino M Del, Manásevich R. Infinitely many T-periodic solutions for a problem arising in nonlinear elasticity[J]. J Differential Equations, 1993,103: 260 – 277.

[5] Pino M. Del, Manásevich R, Montero A. T-periodic solutions for some second order differential equations with singularities[J]. Proc R Soc Edinb A,1992,120: 231 – 243.

[6] Ding T, Iannacci R, Zanolin F. On periodic solutions of sublinear Duffing equations[J]. J Math Anal Appl, 1991,158: 316 – 332.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[7] Fonda A, Toader R. Periodic orbits of radially symmetric Keplerian-like systems: a topological degree approach [J]. J Differential Equations, 2008,244: 3235 – 3264.
[8] Habets P, Sanchez L. Periodic solutions of some Liénard equations with singularities [J]. Proc Amer Math Soc, 1990, 109: 1035 – 1044.
[9] Hakl R, Torres P, Zamora M. Periodic solutions of singular second order differential equations: upper and lower functions [J]. Nonlinear Anal, 2011,74: 7078 – 7093.
[10] Jiang D, Chu J, Zhang M. Multiplicity of positive periodic solutions to superlinear repulsive singular equations [J]. J Differential Equations, 2005,211: 282 – 302.
[11] Lazer A C, Solimini S. On periodic solutions of nonlinear differential equations with singularities [J]. Proc Amer Math Soc, 1987,88: 109 – 114.
[12] Torres P J. Existence of one-signed periodic solutions of some second order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem [J]. J Differential Equations, 2003,190: 643 – 662.
[13] Torres P J. Weak singularities may help periodic solutions to exist [J]. J Differential Equations, 2007,232: 277 – 284.
[14] Wang H. Positive periodic solutions of singular systems with a parameter [J]. J Differential Equations, 2010,249: 2986 – 3002.
[15] Wang Z. Periodic solutions of the second order differential equations with singularities [J]. Nonlinear Anal, 2004,58: 319 – 331.
[16] Wang Z, Ma T. Existence and multiplicity of periodic solutions of semilinear resonant Duffing equations with singularities [J]. Nonlinearity, 2012,25: 279 – 307.
[17] Wang Z. Lazer-Leach type conditions on periodic solutions of semilinear resonant Duffing equations with singularities [J]. Z Angew Math Phys, 2014,65: 69 – 89.
[18] Zhang M. A relationship between the periodic and the Dirichlet BVPs of singular differential equations [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1998,128: 1099 – 1114.

Periodic Solutions of Duffing Equations with Singularities and Unbounded Perturbations at Resonance

Ma Tiantian[1]　Zhang Tiehui[2]　Huang Yan[3]

(1. Capital Normal University, Beijing　100048; 2. Elementary Education College, Jining University, Qufu Shandong 273165; 3. Basic Teaching Department, Zaozhuang Vocational College, Zaozhuang Shandong　277800)

Abstract

In this paper, we study the existence of periodic solutions of Duffing equations with singularities $x'' + \frac{1}{4}n^2x + g(x) = p(t)$, where n is a positive integer and $g: (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ is locally Lipschitz continuous and has a singularity at the origin. By using phase plane analysis method and the continuation theorem, we prove that the given equation has at least one periodic solution provided that g is unbounded and satisfies sub-quadratic condition at infinity.

Key words: Duffing equations, singularity, periodic solution, continuation theorem.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net