定义在锥K上的张量互补问题解集的性质研究*

郑红茹，谷伟哲**

（天津大学数学学院，天津 300350）

摘要：本文将张量互补问题由非负锥$\mathbf{R}^n_+$推广到更为一般的尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$上，并定义了新的结构张量．进一步证明了其相应的张量互补问题解集的唯一性、有界性以及紧性等性质．

关键词：张量互补问题；尖闭凸锥；结构张量；唯一性；有界性；紧性

中图分类号：O224 **DOI**：10.19789/j.1004-9398.2021.03.001

0 引 言

互补问题是指决策变量之间达到某种平衡的一类问题．与博弈论、极大与极小、有限维变分不等式[1]等数学分支有密切联系，在结构工程、力学、交通和经济等领域有着广泛的应用[2-5]．而张量互补问题则是一种特殊形式的互补问题．生活中很多问题都可以归结为张量互补问题，如Huang和Qi[6]将n人非合作博弈重新定义成张量互补问题，并应用光滑型算法得出了数值结果，这在管理科学中是一个有趣的应用．

给定一个数学模型，其是否有解或有唯一解，一般情况下是不容易弄清楚的．迄今张量互补问题解的存在性、唯一性、有界性以及误差界在很多文献中都有研究[7-12]．Song和Qi[8]讨论了(严格)半正张量涉及的张量互补问题解的存在性，以及半正对称张量和协正对称张量的等价性；Che等[10]讨论了协(对称)正定张量以及可对角化张量涉及的张量互补问题解的存在性和唯一性；Song和Qi[12]讨论了Q－张量和主对角元素均为正数的非负张量的等价性，并证明了当$\boldsymbol{q}\geqslant\boldsymbol{0}$时，非负$Q$－张量涉及的张量互补问题只有唯一的可行解为$\boldsymbol{0}$.

在上述文献研究基础上，本文在尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$上定义了$\boldsymbol{K}$－协正张量、$\boldsymbol{K}$－严格协正张量、$\boldsymbol{K}$－ER张量、$\boldsymbol{K}$－R_0张量以及$\boldsymbol{K}$－R张量，并讨论了其涉及的张量互补问题解集的性质．

1 预备知识

本文中，$m,n\geqslant 2$是2个给定的正整数．$I_n:=\{1,2,\cdots,n\}$是一个下标集合．定义$\mathbf{R}^n$是欧几里得空间中所有长度为n的列向量组成的集合，即$\mathbf{R}^n:=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}:x_i\in\mathbf{R},i\in I_n\right\}$，其中$\mathbf{R}$为实数，符号T代表转置．除此之外，定义$\mathbf{R}^n_+:=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:x_i\geqslant 0,i\in I_n\right\}$.对任意的$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，可定义

$I^{(\boldsymbol{x})}_{++}:=\left\{i\in I_n:x_i>0\right\}$和$I^{(\boldsymbol{x})}_{--}:=\left\{i\in I_n:x_i<0\right\}$. 设$\boldsymbol{A}=(a_{i_1\cdots i_m})$为$m$阶$n$维实张量，其元素$a_{i_1\cdots i_m}\in\mathbf{R}$，$i_j\in I_n$，$j\in I_m$，将其全体记为$\boldsymbol{T}_{m,n}$. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}$是$\mathbf{R}^n$中的列向量，其第$i$个分量为

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1})_i:=\sum_{i_2\cdots i_m=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m},$$

式中$i\in I_n$. 显然，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}$的每个分量均为$m-1$次的多项式．$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^m$为$m$次多项式在$\boldsymbol{x}$处的函数值，形如

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^m:=\sum_{i_1\cdots i_m=1}^{n}a_{i_1i_2\cdots i_m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}.$$

Qi[13]引入了非负锥$\mathbf{R}^n_+$上(严格)协正张量的概念；Wang等[14]则给出了非负锥$\mathbf{R}^n_+$上ER张量、R_0张量和R张量的定义．

定义1.1[13-14] 设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{T}_{m,n}$：

(1)若对任意的$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n_+$，都有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^m\geqslant 0$，则称$\boldsymbol{A}$为协正张量；

(2)若对任意的$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n_+\backslash\{\boldsymbol{0}\}$，都有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^m>0$，则称

收稿日期：2020-05-26

* 国家自然科学基金项目(11871051)

** 通信作者：guweizhe@tju.edu.cn

$\boldsymbol{A}$为严格协正张量;

(3)若不存在$(\boldsymbol{x},t)\in(\mathbf{R}_+^n\backslash\{\boldsymbol{0}\})\times\mathbf{R}_+$,使得

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1})_i+tx_i=0, & \text{如果}x_i>0,\\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1})_i\geqslant 0, & \text{如果}x_i=0\end{cases}$$

成立,则称$\boldsymbol{A}$为ER张量;取特殊情况,令$t=0$,即不存在$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}_+^n\backslash\{\boldsymbol{0}\}$,使得

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1})_i=0, & \text{如果}x_i>0,\\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1})_i\geqslant 0, & \text{如果}x_i=0\end{cases}$$

成立,则称$\boldsymbol{A}$为R_0张量;

(4)若不存在$(\boldsymbol{x},t)\in(\mathbf{R}_+^n\backslash\{\boldsymbol{0}\})\times\mathbf{R}_+$,使得

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1})_i+t=0, & \text{如果}x_i>0,\\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1})_i+t\geqslant 0, & \text{如果}x_i=0\end{cases}$$

成立,则称$\boldsymbol{A}$为R张量.

本文考虑的是一类尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$上的张量互补问题TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$,其目的是寻找$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K},\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^*,\\ \left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+\boldsymbol{q}\right\rangle=0\end{cases}\tag{1}$$

成立,其中$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{T}_{m,n}$,$\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{K}^*:=\left\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n:\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geqslant 0,\ \forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}\right\}$为$\boldsymbol{K}$的对偶锥.下面将给出有关锥的定义,并给出TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$定义可行,以及满足什么条件是可解的.

定义1.2[15] 在n维欧几里得空间$\mathbf{R}^n$中,$\boldsymbol{K}\subset\mathbf{R}^n$是一非空子集:

(1)若对任意的$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$和实数$\lambda\geqslant 0$,均有$\lambda\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$,则称$\boldsymbol{K}$为锥;

(2)若对任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{K}$和实数$\alpha,\beta\geqslant 0$,均有$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{K}$,则称$\boldsymbol{K}$为凸锥;

(3)若$\boldsymbol{K}$为锥,且$\boldsymbol{K}\cap-\boldsymbol{K}=\{\boldsymbol{0}\}$,则称$\boldsymbol{K}$为尖锥;

(4)若$\boldsymbol{K}$为锥,且$\boldsymbol{K}$为闭集,则称$\boldsymbol{K}$为闭锥;

(5)若$\boldsymbol{K}$有内点,则称$\boldsymbol{K}$是立体的,并记int$(\boldsymbol{K})$为$\boldsymbol{K}$的内部.

定义1.3 给定尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$,设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{T}_{m,n}$和$\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^n$,如果$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$且$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^*$,则称向量$\boldsymbol{x}$是可行的;如果可行向量$\boldsymbol{x}$存在,则称TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$是可行的;如果可行向量$\boldsymbol{x}$满足$\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+\boldsymbol{q}\right\rangle=0$,则称TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$是可解的,$\boldsymbol{x}$是其一个解,将TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$全体解组成的集合记为SOL$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$.

2 结构张量

本节定义尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$上的几种结构张量,并讨论其之间的关系.

定义2.1 给定尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$,设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{T}_{m,n}$:

(1)若对任意的$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$,都有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^m\geqslant 0$,则称$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}$-协正张量;

(2)若对任意的$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$,都有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^m>0$,则称$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}$-严格协正张量.

定义2.2 给定尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$,设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{T}_{m,n}$,若不存在$(\boldsymbol{x},t)\in(\boldsymbol{K}\backslash\{\boldsymbol{0}\})\times\mathbf{R}_+$,使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+t\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^*,\\ \left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+t\boldsymbol{x}\right\rangle=0\end{cases}\tag{2}$$

成立,则称$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}$-ER张量;若令$t=0$,式(2)也不存在解,即不存在$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$,使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}\in\boldsymbol{K}^*,\\ \left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}\right\rangle=0\end{cases}\tag{3}$$

成立,则称$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}$-R_0张量.

在一类特殊的尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$上定义$\boldsymbol{K}$-R张量,当尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$包含的所有元素同一位置的分量,要么全部$\geqslant 0$,要么全部$\leqslant 0$时,对任意的$i\in I_n$,可定义第i维的"代表点"$\boldsymbol{x}^{(i)}$:

(1)当尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$中所有元素的第i个分量都$\geqslant 0$时,$\boldsymbol{x}^{(i)}$的第i个分量为1,其余分量为0;

(2)当尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$中所有元素的第i个分量都$\leqslant 0$时,$\boldsymbol{x}^{(i)}$的第i个分量为-1,其余分量为0.

综上所述,尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$的特殊性在于:其包含的所有元素同一位置的分量,要么全部$\geqslant 0$,要么全部$\leqslant 0$,并且尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$包含所有的"代表点",即对任意的$i\in I_n$,$\boldsymbol{x}^{(i)}\in\boldsymbol{K}$.

注1 $\mathbf{R}_+^n$满足这种特殊性.

显然,$\mathbf{R}_+^n$中的所有元素的同一位置的分量都$\geqslant 0$,并且对任意的$i\in I_n$,$\boldsymbol{x}^{(i)}\in\mathbf{R}_+^n$,其中$\boldsymbol{x}^{(i)}$的第$i$个分量为1,其余分量为0.因此,$\mathbf{R}_+^n$满足这种特殊性.

注2 除了$\mathbf{R}_+^n$外,还有一些锥也满足这种特殊性,例:$\boldsymbol{K}=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}:x_1\geqslant 0,x_2\leqslant 0,x_3\leqslant 0\right\}$.

易知,$\boldsymbol{K}$中所有元素的第1个分量都$\geqslant 0$,第2个和第3个分量都$\leqslant 0$.除此之外,$\boldsymbol{x}^{(1)}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{K}$,$\boldsymbol{x}^{(2)}=(0,-1,0)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{K}$,$x^{(3)}=(0,0,-1)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{K}$.因此,$\boldsymbol{K}=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}:x_1\geqslant 0,x_2\leqslant 0,x_3\leqslant 0\right\}$满足这种特殊性.

定义 2.3　给定满足特殊性的尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$,设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{T}_{m,n}$,若不存在$(\boldsymbol{x},t)\in(\boldsymbol{K}\backslash\{\boldsymbol{0}\})\times\mathbf{R}_+$,使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+t\tilde{\boldsymbol{e}}^{(\boldsymbol{K})}\in\boldsymbol{K}^*,\\ \left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+t\tilde{\boldsymbol{e}}^{(\boldsymbol{K})}\right\rangle=0\end{cases}\tag{4}$$

成立,则称$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}-R$张量,其中,$\tilde{\boldsymbol{e}}^{(\boldsymbol{K})}$为$\boldsymbol{K}$的代表向量,且满足当尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$中所有元素的第$i$个分量都$\geqslant 0$时,$(\tilde{\boldsymbol{e}}^{(\boldsymbol{K})})_i=1$;当尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$中所有元素的第$i$个分量都$\leqslant 0$时,$(\tilde{\boldsymbol{e}}^{(\boldsymbol{K})})_i=-1$.

注 3　当尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$上定义的这几种结构张量均有意义时,有以下的关系:$\boldsymbol{K}$-严格协正张量是$\boldsymbol{K}-ER$张量和$\boldsymbol{K}-R$张量,$\boldsymbol{K}-ER$张量和$\boldsymbol{K}-R$张量是$\boldsymbol{K}-R_0$张量,反之不然.

注 4　当$\boldsymbol{K}=\mathbf{R}^n_+$时,$\boldsymbol{K}$-(严格)协正张量、$\boldsymbol{K}-ER$张量、$\boldsymbol{K}-R_0$张量和$\boldsymbol{K}-R$张量分别为(严格)协正张量、$ER$张量、$R_0$张量和$R$张量.

下面给出反例,说明$\boldsymbol{K}-R_0$张量不一定是$\boldsymbol{K}$-严格协正张量;严格协正张量不一定是$\boldsymbol{K}$-严格协正张量;$\boldsymbol{K}$-严格协正张量也不一定是严格协正张量.

例 2.1　设$\boldsymbol{A}=(a_{i_1i_2i_3})\in\boldsymbol{T}_{3,2}$,其中$a_{111}=a_{122}=a_{211}=a_{222}=-1$,其余元素为0.令$\boldsymbol{K}=\left\{(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2:x_1=x_2\geqslant 0\right\}$,则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^2=\begin{pmatrix}-x_1^2-x_2^2\\-x_1^2-x_2^2\end{pmatrix}.$$

对任意的$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$,有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^3=x_1(-x_1^2-x_2^2)+x_2(-x_1^2-x_2^2)=-4x_1^3<0$,也就是说,式(3)在$\boldsymbol{K}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$中无解,即$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{K}-R_0$张量,但不是$\boldsymbol{K}$-严格协正张量.

例 2.2　设$\boldsymbol{A}=(a_{i_1i_2i_3})\in\boldsymbol{T}_{3,2}$,其中$a_{111}=a_{222}=1$,其余元素为0.令$\boldsymbol{K}=\left\{(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2:x_1=x_2\leqslant 0\right\}$,则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^2=\begin{pmatrix}x_1^2\\x_2^2\end{pmatrix}.$$

对任意的$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2_+\backslash\{\boldsymbol{0}\}$,有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^3=x_1^3+x_2^3>0$,即$\boldsymbol{A}$是严格协正张量.但对任意的$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$,有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^3=x_1^3+x_2^3=2x_1^3<0$,故$\boldsymbol{A}$不是$\boldsymbol{K}$-严格协正张量.

例 2.3　设$\boldsymbol{A}=(a_{i_1i_2i_3})\in\boldsymbol{T}_{3,2}$,其中$a_{111}=a_{222}=-1$,其余元素为0.令$\boldsymbol{K}=\left\{(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2:x_1=x_2\leqslant 0\right\}$,则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^2=\begin{pmatrix}-x_1^2\\-x_2^2\end{pmatrix}.$$

对任意的$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$,有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^3=-(x_1^3+x_2^3)=-2x_1^3>0$,即$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{K}$-严格协正张量.但对任意的$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2_+\backslash\{\boldsymbol{0}\}$,有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^3=-(x_1^3+x_2^3)<0$,故$\boldsymbol{A}$不是严格协正张量.

3　解集的性质

本节将重点讨论尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$上的张量互补问题解集的唯一性、有界性和紧性.

引理 3.1　给定尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$,设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{T}_{m,n}$,则$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}-R_0$张量当且仅当TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{0})$有唯一解$\boldsymbol{0}$.

证明　当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$时,不难得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K},\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}=\boldsymbol{0}\in\boldsymbol{K}^*,\\ \left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}\right\rangle=0.\end{cases}$$

因此,$\boldsymbol{0}$是TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{0})$的解.另外,若$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}-R_0$张量,由定义2.2可知,不存在$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$,使得式(3)成立,也就是说,TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{0})$没有非零解.故TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{0})$有唯一解$\boldsymbol{0}$.

TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{0})$有唯一解$\boldsymbol{0}$,也就是说,TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{0})$没有非零解,即

$$\begin{cases}\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K},\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}\in\boldsymbol{K}^*,\\ \left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}\right\rangle=0,\end{cases}\tag{5}$$

式(5)没有解.由定义2.2可知,$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}-R_0$张量.

下面将讨论$\boldsymbol{K}$-(严格)协正张量涉及的张量互补问题解集的唯一性.

定理 3.1　给定尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$,设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{T}_{m,n}$,则有以下结论:

(1)对任意的$\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^*$,若$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}$-严格协正张量,则TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$有唯一解;

(2)对任意的$\boldsymbol{q}\in\mathrm{int}(\boldsymbol{K}^*)$,若$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}$-协正张量,则TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$有唯一解.

证明　(1)给定$\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^*$,当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$时,不难得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K},\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^*,\\ \left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+\boldsymbol{q}\right\rangle=0.\end{cases}$$

因此,$\boldsymbol{0}$是TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$的解.假设TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$还存在非零解$\bar{\boldsymbol{x}}$,可知

$$\begin{cases}\boldsymbol{0}\neq\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{K},\\ \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1}+\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^{*},\\ \left\langle\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1}+\boldsymbol{q}\right\rangle=0.\end{cases}$$

由于$\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^{*}$,易知,$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m}=-\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}\leqslant 0$. 由定义2.1可知,这与$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}$ - 严格协正张量矛盾.

(2)给定$\boldsymbol{q}\in\mathrm{int}(\boldsymbol{K}^{*})$,同理,$\boldsymbol{0}$是TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$的解. 假设TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$还存在非零解$\bar{\boldsymbol{x}}$,可知

$$\begin{cases}\boldsymbol{0}\neq\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{K},\\ \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1}+\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^{*},\\ \left\langle\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1}+\boldsymbol{q}\right\rangle=0.\end{cases}$$

由于$\boldsymbol{q}\in\mathrm{int}(\boldsymbol{K}^{*})$,易知,$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m}=-\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}<0$. 由定义2.1可知,这与$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}$ - 协正张量矛盾.

接下来,将讨论$\boldsymbol{K}$ - R_0张量涉及的张量互补问题解集的有界性.

定理3.2 给定尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$,设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{T}_{m,n}$,则以下结论是等价的:

(1)$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}$ - R_0张量;

(2)对任意的$\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^{n}$和$s,t\in\mathbf{R}$且$t>0$,集合$\tau(\boldsymbol{q},s,t)=\left\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}\,\middle|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^{*}\text{且}t\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}\leqslant s\right\}$有界;

(3)对任意的$\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^{n}$,SOL$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$是有界的(如果非空).

证明 (1)⇒(2)用反证法,假设存在$\boldsymbol{q}'\in\mathbf{R}^{n}$和$s',t'\in\mathbf{R}$且$t'>0$,使得$\tau(\boldsymbol{q}',s',t')$是无界的. 令$\left\{\boldsymbol{x}^{k}\right\}\subset\tau(\boldsymbol{q}',s',t')$是一无界序列,构造序列$\left\{\dfrac{\boldsymbol{x}^{k}}{\left\|\boldsymbol{x}^{k}\right\|}\right\}$,易知,其是有界的. 由于有界序列一定有收敛子列,因此,存在收敛的子列$\left\{\dfrac{\boldsymbol{x}^{k_j}}{\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|}\right\}$. 不失一般性,令$\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}^{*}=\lim\limits_{j\to\infty}\dfrac{\boldsymbol{x}^{k_j}}{\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|}$,且$\lim\limits_{j\to\infty}\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|=\infty$. 由于$\boldsymbol{x}^{k_j}\in\boldsymbol{K},\dfrac{1}{\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|}\geqslant 0$,可知$\dfrac{\boldsymbol{x}^{k_j}}{\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|}\in\boldsymbol{K}$,令$j\to\infty$,得到$\boldsymbol{x}^{*}\in\boldsymbol{K}$. 再根据$\tau\left(\boldsymbol{q}',s',t'\right)$的定义,可知

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{k_j})^{m-1}+\boldsymbol{q}'\in\boldsymbol{K}^{*},\\ t'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{k_j})^{m}+(\boldsymbol{x}^{k_j})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}'\leqslant s'.\end{cases}\tag{6}$$

再将式(6)的第1和2个式子分别除以$\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|^{m-1}$和$\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|^{m}$,根据锥的定义,由于$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{k_j})^{m-1}+\boldsymbol{q}'\in\boldsymbol{K}^{*}$,$\dfrac{1}{\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|^{m-1}}\geqslant 0$,可知$\dfrac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{k_j})^{m-1}+\boldsymbol{q}'}{\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|^{m-1}}\in\boldsymbol{K}^{*}$,进而得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}^{k_j}}{\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|}\right)^{m-1}+\dfrac{\boldsymbol{q}'}{\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|^{m-1}}\in\boldsymbol{K}^{*},\\ t'\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}^{k_j}}{\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|}\right)^{m}+\dfrac{(\boldsymbol{x}^{k_j})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}'}{\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|^{m}}\leqslant\dfrac{s'}{\left\|\boldsymbol{x}^{k_j}\right\|^{m}}.\end{cases}\tag{7}$$

令$j\to\infty$,由式(7)的第1个式子,可知$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{*})^{m-1}\in\boldsymbol{K}^{*}$,即$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{*})^{m}\geqslant 0$. 由式(7)的第2个式子,可知$t'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{*})^{m}\leqslant 0$,由于$t'>0$,得到$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{*})^{m}\leqslant 0$. 因此,可知$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{*})^{m}=0$,也就是说,$\boldsymbol{x}^{*}$是TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{0})$的一个非零解. 由引理3.1可知,这与$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}$ - R_0张量矛盾.

(2)⇒(3)令$s=0,t=1$,根据$\tau(\boldsymbol{q},s,t)$的定义,显然有$\tau(\boldsymbol{q},0,1)=\left\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}\,\middle|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^{*}\text{且}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}\leqslant 0\right\}$. 其次,注意到对偶锥$\boldsymbol{K}^{*}$的性质,有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}\geqslant 0$. 因此,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}=0$,这意味着$\tau(\boldsymbol{q},0,1)$是TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$的解集.

(3)⇒(1)用反证法,假设$\boldsymbol{A}$不是$\boldsymbol{K}$ - R_0张量,由引理3.1可知TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{0})$存在非零解$\bar{\boldsymbol{x}}$,对于所有的$\alpha>0$,均有

$$\begin{cases}\alpha\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{K},\\ \boldsymbol{A}(\alpha\bar{\boldsymbol{x}})^{m-1}=\alpha^{m-1}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1}\in\boldsymbol{K}^{*},\\ \left\langle\alpha\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{A}(\alpha\bar{\boldsymbol{x}})^{m-1}\right\rangle=\alpha^{m}\left\langle\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1}\right\rangle=0.\end{cases}$$

不难看出,$\alpha\bar{\boldsymbol{x}}$也是TCP$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{0})$的解. 由于$\alpha$可以取非常大的正数,因此,$\|\alpha\bar{\boldsymbol{x}}\|$可取到$+\infty$,这与SOL$(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{0})$有界矛盾.

再接下来,将讨论$\boldsymbol{K}$ - R张量涉及的张量互补问题解集的紧性. 需要注意的是,此时尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$必须满足第2节中提到的特殊性.

引理3.2[15] 令$\boldsymbol{C}\subset\mathbf{R}^{n}$为一非空有界闭凸集,映射$F:\boldsymbol{C}\to\mathbf{R}^{n}$为一连续映射,则一定存在$\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}$,使得

$$(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}F(\bar{\boldsymbol{x}})\geqslant 0,\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$$

成立.

给定$\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^{n},\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x},s),\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K},s\in\mathbf{R}_{+}$,令$\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{K}\times\mathbf{R}_{+}:\sum\limits_{i=1}^{n+1}\left|y_i\right|=1\right\}$,显然,$\boldsymbol{S}$是一非空有界闭凸集. 定义映射$F:\boldsymbol{S}\to\mathbf{R}^{n+1}$,

$$F\left(\boldsymbol{y}\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+s\boldsymbol{q}+s\tilde{\boldsymbol{e}}^{(K)}\\ s\end{pmatrix}.$$

因为尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$包含的所有元素同一位置的分量,要么全部≥0,要么全部≤0,所以映射F一定连续,由引理3.2可知,一定存在$\bar{y}=(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{s})$,满足

$$(\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}})^{\mathrm{T}}F(\bar{\boldsymbol{y}})\geqslant 0,\forall \boldsymbol{y}\in \boldsymbol{S}.$$

记$I_{+}^{(\mathrm{S})}$为$\boldsymbol{S}$中所有元素同一位置的分量都≥0的下标集合,$I_{-}^{(\mathrm{S})}$为$\boldsymbol{S}$中所有元素同一位置的分量都≤0的下标集合.显然,对任意的$i\in I_{-}^{(\mathrm{S})}$,有$y_i(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i=\left|y_i\right|(-(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i)$.因此,有

$$\bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}F(\bar{\boldsymbol{y}})=\min_{\boldsymbol{y}\in \mathrm{S}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}F(\bar{\boldsymbol{y}})=$$

$$\min\left\{\min_{i\in I_{+}^{(\mathrm{S})}}\{(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i\},\min_{i\in I_{-}^{(\mathrm{S})}}\{-(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i\}\right\}.$$

为了简便,记

$$\gamma=\min\left\{\min_{i\in I_{+}^{(\mathrm{S})}}\{(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i\},\min_{i\in I_{-}^{(\mathrm{S})}}\{-(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i\}\right\}.$$

当$\bar{y}_i=0$时,根据γ、$I_{+}^{(\mathrm{S})}$和$I_{-}^{(\mathrm{S})}$的定义,可知,当$\boldsymbol{S}$中所有元素的第i个分量都≥0时,有

$$(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i\geqslant\gamma.$$

当$\boldsymbol{S}$中所有元素的第i个分量都≤0时,有

$$(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i\leqslant-\gamma.$$

如果存在$i\in I_{++}^{(\bar{y})}$,$(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i>\gamma$或者$i\in I_{--}^{(\bar{y})}$,$(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i<-\gamma$,则有

$$\bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}F(\bar{\boldsymbol{y}})=\min_{\boldsymbol{y}\in \mathrm{S}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}F(\bar{\boldsymbol{y}})>\gamma.$$

这与$\bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}F(\bar{\boldsymbol{y}})=\gamma$矛盾.因此,一定有

$$\begin{cases}(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i=\gamma, & \text{如果}\bar{y}_i>0,\\ (F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i=-\gamma, & \text{如果}\bar{y}_i<0\end{cases}$$

成立.

定理3.3　给定满足特殊性的尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$,若$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}-R$张量,则对任意给定的$\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^n$,$\mathrm{SOL}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$非空且为紧集.

证明　首先证明$\mathrm{SOL}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$非空.分2种情况讨论$\bar{s}$的取值:$\bar{s}=0$和$\bar{s}>0$.

(1)当$\bar{s}=0$时,由于$\bar{\boldsymbol{y}}=(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{s})\in\boldsymbol{S}$,故$\boldsymbol{0}\neq\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{K}$,如果尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$中所有元素的第$i$个分量都≥0,可知

$$\begin{cases}(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i=\gamma,\text{如果}\bar{y}_i=\bar{x}_i>0,\\ (F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i\geqslant\gamma,\text{如果}\bar{y}_i=\bar{x}_i=0,\\ (F(\bar{\boldsymbol{y}}))_{n+1}=\bar{s}=0\geqslant\gamma,\text{如果}\bar{y}_{n+1}=0.\end{cases}$$

令$t=-\gamma\geqslant 0$,有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1})_i+t=0,\text{如果}\bar{x}_i>0,\\ (\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1})_i+t\geqslant 0,\text{如果}\bar{x}_i=0.\end{cases}$$

如果尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$中所有元素的第i个分量都≤0,可知

$$\begin{cases}(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i=-\gamma,\text{如果}\bar{y}_i=\bar{x}_i<0,\\ (F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i\leqslant-\gamma,\text{如果}\bar{y}_i=\bar{x}_i=0,\\ (F(\bar{\boldsymbol{y}}))_{n+1}=\bar{s}=0\geqslant\gamma,\text{如果}\bar{y}_{n+1}=0.\end{cases}$$

相应地,令$t=-\gamma\geqslant 0$,有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1})_i-t=0,\text{如果}\bar{x}_i<0,\\ (\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1})_i-t\leqslant 0,\text{如果}\bar{x}_i=0.\end{cases}$$

显然,对任意的$i\in I_n$,都有$\bar{x}_i(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1}+t\tilde{\boldsymbol{e}}^{(K)})_i=0$,因此,$\left\langle\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1}+t\tilde{\boldsymbol{e}}^{(K)}\right\rangle=0$.另外,由尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$的性质,可知$\boldsymbol{K}^*=\boldsymbol{K}$.因此,有$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1}+t\tilde{\boldsymbol{e}}^{(K)}\in\boldsymbol{K}$,也就是说,$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1}+t\tilde{\boldsymbol{e}}^{(K)}\in\boldsymbol{K}^*$,则$(\bar{x},t)$是式(4)的解.由定义2.3可知,这与$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{K}-R$张量矛盾.

(2)当$\bar{s}>0$时,如果尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$中所有元素的第i个分量都≥0,可知

$$\begin{cases}(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i=(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1})_i+\bar{s}\boldsymbol{q}_i+\bar{s}(\tilde{\boldsymbol{e}}^{(K)})_i=\gamma,\text{如果}\bar{y}_i=\bar{x}_i>0,\\ (F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i=(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1})_i+\bar{s}\boldsymbol{q}_i+\bar{s}(\tilde{\boldsymbol{e}}^{(K)})_i\geqslant\gamma,\text{如果}\bar{y}_i=\bar{x}_i=0,\\ (F(\bar{\boldsymbol{y}}))_{n+1}=\bar{s}=\gamma,\text{如果}\bar{y}_{n+1}>0.\end{cases}$$

化简,可得

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1})_i+\bar{s}\boldsymbol{q}_i=0,\text{如果}\bar{x}_i>0,\\ (\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1})_i+\bar{s}\boldsymbol{q}_i\geqslant 0,\text{如果}\bar{x}_i=0.\end{cases}$$

左右两边同时除以$\bar{s}$,可得

$$\begin{cases}\left(\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\bar{\boldsymbol{x}}}{\bar{s}^{\frac{1}{m-1}}}\right)^{m-1}\right)_i+\boldsymbol{q}_i=0,\text{如果}\bar{x}_i>0,\\ \left(\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\bar{\boldsymbol{x}}}{\bar{s}^{\frac{1}{m-1}}}\right)^{m-1}\right)_i+\boldsymbol{q}_i\geqslant 0,\text{如果}\bar{x}_i=0.\end{cases}$$

如果尖闭凸锥$\boldsymbol{K}$中所有元素的第i个分量都≤0,可知

$$\begin{cases}(F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i=(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1})_i+\bar{s}\boldsymbol{q}_i+\bar{s}(\tilde{\boldsymbol{e}}^{(K)})_i=-\gamma,\text{如果}\bar{y}_i=\bar{x}_i<0,\\ (F(\bar{\boldsymbol{y}}))_i=(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1})_i+\bar{s}\boldsymbol{q}_i+\bar{s}(\tilde{\boldsymbol{e}}^{(K)})_i\leqslant-\gamma,\text{如果}\bar{y}_i=\bar{x}_i=0,\\ (F(\bar{\boldsymbol{y}}))_{n+1}=\bar{s}=\gamma,\text{如果}\bar{y}_{n+1}>0.\end{cases}$$

同理可得

$$\begin{cases}\left(\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\bar{\boldsymbol{x}}}{\bar{s}^{\frac{1}{m-1}}}\right)^{m-1}\right)_i+\boldsymbol{q}_i=0, \text{如果} \bar{x}_i<0,\\ \left(\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\bar{\boldsymbol{x}}}{\bar{s}^{\frac{1}{m-1}}}\right)^{m-1}\right)_i+\boldsymbol{q}_i\geqslant 0, \text{如果} \bar{x}_i=0.\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{z}=\dfrac{\bar{\boldsymbol{x}}}{\bar{s}^{\frac{1}{m-1}}}$,可知,对任意的 $i\in I_n$, 有 $z_i(\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{m-1}+\boldsymbol{q})_i=0$,容易得到 $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{m-1}+\boldsymbol{q}\rangle=0$. 由于 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{K}, \dfrac{1}{\bar{s}^{\frac{1}{m-1}}}\geqslant 0$, 故 $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{K}$. 又由尖闭凸锥 $\boldsymbol{K}$ 的性质,可知 $\boldsymbol{K}^*=\boldsymbol{K}$, 易知 $\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{m-1}+\bar{s}\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^*$. 又由于 $\dfrac{1}{\bar{s}}\geqslant 0$,进而得到,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{m-1}+\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^*$. 综上所述,$\boldsymbol{z}$ 是 $\mathrm{TCP}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$ 的解.

接下来证明 $\mathrm{SOL}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$ 是紧集. 在 $\mathbf{R}^n$ 中,有界闭集和紧集是等价的,故只需证 $\mathrm{SOL}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$ 是闭集和有界集即可.

证明　$\mathrm{SOL}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$ 是闭的,取序列 $\{\boldsymbol{x}^k\}\subset\mathrm{SOL}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^k=\boldsymbol{x}^*$,根据 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}^*$ 是闭集,可知 $\boldsymbol{x}^*\in\boldsymbol{K}, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^*)^{m-1}+\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{K}^*$, 又由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}+\boldsymbol{q}$ 的连续性,得到 $\lim\limits_{k\to\infty}(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^k)^{m-1}+\boldsymbol{q})=(\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^*)^{m-1}+\boldsymbol{q}\right)=0$, 也就是说,$\boldsymbol{x}^*\in\mathrm{SOL}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$. 因此,$\mathrm{SOL}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$ 是闭的.

因为 $\boldsymbol{K}-R$ 张量是 $\boldsymbol{K}-R_0$ 张量,由定理 3.2 可知,当 $\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^n$ 时,$\mathrm{SOL}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{A},\boldsymbol{q})$ 有界.

4　结　论

本文在尖闭凸锥 $\boldsymbol{K}$ 上定义了 $\boldsymbol{K}$ -协正张量、$\boldsymbol{K}$ -严格协正张量、$\boldsymbol{K}-ER$ 张量、$\boldsymbol{K}-R_0$ 张量以及 $\boldsymbol{K}-R$ 张量这 5 种结构张量,并讨论了相互关系. 同时,证明了 $\boldsymbol{K}$ -(严格)协正张量涉及的张量互补问题解集的唯一性、$\boldsymbol{K}-R_0$ 张量涉及的张量互补问题解集的有界性以及 $\boldsymbol{K}-R$ 张量涉及的张量互补问题解集的紧性. 后续将进一步研究尖闭凸锥 $\boldsymbol{K}$ 上的张量互补问题解的稳定性和连续性.

参 考 文 献

[1] ABDI F, SHAKERI F. A new descent method for symmetric non-monotone variational inequalities with application to eigenvalue complementarity problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2017, 173(3): 923-940.

[2] ISAC G. Topological methods in complementarity theory [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[3] 芮绍平,徐成贤. 求解障碍问题自由边界的一种非精确光滑方法[J]. 高校应用数学学报(A辑),2012,27(4):449-455.

[4] 程小林,郑兴,李旭伟. 基于概率后缀树的股票时间序列预测方法研究[J]. 四川大学学报(自然科学版),2018,55(1):61-66.

[5] 陈翔,唐俊勇. 基于贝叶斯与因果岭回归的物联网流量预测模型[J]. 四川大学学报(自然科学版),2018,55(5):965-970.

[6] HUANG Z H, QI L Q. Formulating an n-person noncooperative game as a tensor complementarity problem [J]. Computational Optimization and Applications, 2017, 66(3): 557-576.

[7] LUO Z Y, QI L Q, XIU N H. The sparsest solutions to Z-tensor complementarity problems [J]. Optimization Letters, 2017, 11(3): 471-482.

[8] SONG Y S, QI L Q. Tensor complementarity problem and semi-positive tensors [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, 169(3): 1069-1078.

[9] SONG Y S, YU G H. Properties of solution set of tensor complementarity problem [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, 170(1): 85-96.

[10] CHE M L, QI L Q, WEI Y M. Positive-definite tensors to nonlinear complementarity problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, 168(2): 475-487.

[11] BAI X L, HUANG Z H, WANG Y. Global uniqueness and solvability for tensor complementarity problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, 170(1): 72-84.

[12] SONG Y S, QI L Q. Properties of tensor complementarity problem and some classes of structured tensors [J]. Annals of Applied Mathematics, 2017, 33(3): 308-323.

(下转第16页)

分变换给出的Fresnel型高阶积分$S(n)$、$C(n)$及相关的实积分进行求解和计算,得到了统一的表达式并进行了证明,彻底解决了其在不同领域因计算带来的问题.

参 考 文 献

[1] 钟文体. Fresnel 积分的再推广[J]. 大学数学,2016,32(2):77-81.
[2] 邢家省,杨小远. 菲涅尔积分的积分计算方法[J]. 四川理工学院学报(自然科学版),2016,29(3):85-92.
[3] 邢家省,杨小远. 广义菲涅尔积分的积分交换次序计算方法[J]. 四川理工学院学报(自然科学版),2016,29(3):85-92.
[4] 徐芳雅. 新型菲涅尔光学天线设计[D]. 成都:电子科技大学,2018.
[5] 许翼雁. 菲涅耳衍射的计算机模拟研究[J]. 现代显示,2012(11):38-43.
[6] 李俊昌. 激光的衍射及热作用计算[M]. 北京:科学出版社,2008.
[7] 王新稳. 微波技术与天线[M].4版. 北京:电子工业出版社,2001.
[8] 于文化,乔培海,崔香萍,等. 回旋线曲线在道路建设中的应用[J]. 黑龙江水专学报,2000,27(1):66-67.
[9] 梁昌洪. 复变函数札记[M]. 北京:科学出版社,2011.
[10] 《数学手册》编写组. 数学手册[M].3版. 北京:人民教育出版社,1979.
[11] 埃伯哈德·蔡德勒. 数学指南:实用数学手册[M].3版. 李文林,译. 北京:科学出版社,2012.
[12] 姚端正,梁家宝. 数学物理方法[M].2版. 武汉:武汉大学出版社,2004.
[13] 张元林. 积分变换[M].4版. 北京:高等教育出版社,2003.
[14] 《实用积分表》编委会. 实用积分表[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2006.

The expression of the higher order Fresnel integration

HUANG Wei[1,2], DUAN Xuchao[2]

(1. Department of Basis, Baoji Vocational and Technical College, Baoji Shaanxi 721013; 2. Institute of Physics and Optoelectronics Technology, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji Shaanxi 721016)

Abstract: Fresnel integration is widely used in the fields of physical optics, microwave technology and antennas. In this paper, by using the methods of complex analysis, properties of the gamma function and integral change, the unified express of the higher order Fresnel integration in the general case is proved with the help of complex analysis method.

Keywords: Fresnel integration; higher order; complex analysis method; properties of gamma function; the unified express

(责任编辑:马田田)