DOI:10.19789/j.1004-9398.2017.03.005

广义的五阶 KdV 方程的不变子空间*

张亚敏
(宝鸡文理学院数学与信息科学学院,陕西 宝鸡 721013)

摘 要

研究广义的五阶 KdV 方程. 运用不变子空间的方法得出方程中非线性微分算子允许的二维、三维、四维、五维、六维不变子空间,利用所得的五种不变子空间分别可以构造出方程更多的精确解,从而丰富了这类方程解的研究.

关键词: 不变子空间,条件 Lie-Bäcklund 对称,精确解.
中图分类号: O175.29

1 引 言

在许多领域中,如物理、生物、化学等,模型的研究归结为非线性偏微分方程的研究,因此求解偏微分方程的精确解对于这些领域的进一步研究具有至关重要的作用,而求非线性偏微分方程精确解没有统一方法,寻找非线性微分方程精确解成为数学研究的热点之一,常用的方法有李点对称法[1]、首次积分法[2]、条件对称法[3]、不变子空间方法[4,5]等.

不变子空间方法与条件 Lie-Bäcklund 对称及微分约束相关的构造非线性偏微分方程精确解的有效方法,开始由 Galationov 等[4,5]提出,屈长征等人[6,7]对它进一步推广,成功地将它应用于非线性扩散方程,得出了一些有意义的结果[8-12]. 这种方法也用于研究薄膜方程[5],非线性色散演化方程组[9-13].

本文研究著名的广义五阶 KdV 方程

$$u_t + u_{xxxxx} = au^2u_x + bu_xu_{xx} + cuu_{xxx}, \quad (1)$$

其中 a,b,c 为任意实常数. 它描述引力场中孤立波的传播过程. 近些年,也用于描述等离子体波、毛细管重力水波及非线性光学等模型. 因此求广义五阶 KdV 方程的解,对研究上面的这些实际问题具有很大理论指导. 又由于它接近 Caudrey Dodd-Gibbon 方程,Lax 方程,Kaup Kupershmidt (KP) 方程,Ito 方程,因此研究广义五阶 KdV 方程的解,对这些方程解的研究具有很大的帮助.

收稿日期: 2016-05-31
* 陕西省自然科学基础研究计划资助项目(2014JM1027);宝鸡文理学院项目(YK1619).

2 不变子空间方法

一般非线性演化方程

$$u_t = F[u] = F(x,u,u_x,u_{xx},\cdots), \quad (2)$$

其中 $F[u]$ 是 k 阶微分算子,关于变量 $x,u,u_x,u_{xx},\cdots$,是足够光滑. 令 $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_q(x)$ 是 q 个线性无关的函数,$W_q = \Omega\{g_1(x),g_2(x),\cdots,g_q(x)\}$ 为 $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_q(x)$ 扩张而生成的线性空间,如果 $F[W_q] \subseteq W_q$,则称算子 F 允许线性子空间 W_q,或者称为线性空间 W_q 在 F 算子下不变,即存在 $\lambda_1(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 函数,满足 $F(\sum_{i=1}^{q} c_ig_i(x)) = \sum_{i=1}^{q}\lambda_i(c_1,c_2,\cdots,c_q)g_i(x)$, $c_i \in R, i = 1,2,\cdots,q$. 如果线性子空间 W_q 在 F 下不变,则方程(2)就有下面形式的解

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{q} c_i(t)f_i(x),$$

其中,$c_i(t)$ 满足动力系统

$$c_i'(t) = \lambda_i(c_1(t),c_2(t),\cdots,c_q(t)), i = 1,2,\cdots,q.$$

常系数线性常微分方程

$$L[y] \equiv y^{(q)} + a_{q-1}(x)y^{(q-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

解构成的空间,算子 F 在空间 W_q 下不变的条件为

$$L[F[u]]\mid_{[E]}\equiv 0,$$

其中 $[E]$ 表示 $L[u]=0$ 及其关于 x 求各阶导数的结果.

定理 1[8] 若线性子空间 W_q 在 k 阶微分算子 F 作用下不变,则 $q\leqslant 2k+1$.

3 主要结果

本文中方程(1)的非线性算子 F 为

$$F[u]=au^2u_x+bu_xu_{xx}+cuu_{xxx}. \tag{3}$$

讨论算子 F 允许由常系数微分方程

$$L[y]\equiv y^{(q)}+a_{q-1}y^{(q-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0,\quad a_i\in R,i=1,2,\cdots,q. \tag{4}$$

的解构成的子空间,并在这些子空间中构造方程(1)的解. 由维数定理知 F 算子(3)允许常系数常微分方程(4)定义的不变子空间中分六种情况. 分别为 $q=2,3,\cdots,7$ 维.

3.1 二维不变子空间

如果方程(1)的微分算子(3)允许由二阶常系数线性方程

$$L[y]\equiv y''+a_1y'+a_0y=0. \tag{5}$$

定义的不变子空间,则不变条件为

$$L[F[u]]\mid_E=(D^2F+a_1DF+a_0F)\mid_E=0. \tag{6}$$

其中 $[E]$ 表示 $L[u]=0$ 及其关于 x 的微分结果. 由(6)式计算得

$$2a(u_x)^3+(-2a_1{}^3b+3a_1ba_0-2a_1{}^3c+4a_0a_1c)\cdot(u_x)^2+(-a_0{}^2a_1c-2a_1ba_0{}^2)u^2-6aa_0u^2u_x-4aa_1u(u_x)^2+(3a_0{}^2b-3a_1{}^2ca_0+3a_0{}^2c-4a_1{}^2ba_0)uu_x=0.$$

故约束条件为

$$2a(u_x)^3+(-2a_1{}^3b+3a_1ba_0-2a_1{}^3c+4a_0a_1c)\cdot(u_x)^2+(-a_0{}^2a_1c-2a_1ba_0{}^2)u^2-6aa_0u^2u_x-4aa_1u(u_x)^2+(3a_0{}^2b-3a_1{}^2ca_0+3a_0{}^2c-4a_1{}^2ba_0)uu_x=0.$$

求解上面方程组,得出

(i) $a=0,a_0=0,a_1=0,b=b,c=c$;

(ii) $a=0,a_0=0,a_1=a_1,b=-c,c=c$;

(iii) $a=0,a_0=a_0,a_1=0,b=-c,c=c$

因此,得出下面的定理.

定理 2 三个非线性算子 $F[u]$ 允许由(5)式定义的二维不变子空间 W_2,它们分别是

$$\begin{cases}F[u]=bu_xu_{xx}+cuu_{xxx}\\ L_2[y]=y''=0\\ W_2=\Omega\{1,x\}\end{cases},$$

$$\begin{cases}F[u]=-cu_xu_{xx}+cuu_{xxx}\\ L_2[y]=y''+a_1y'=0\\ W_2=\Omega\{1,\exp(-a_1x)\}\end{cases},$$

$$\begin{cases}F[u]=-cu_xu_{xx}+cuu_{xxx}\\ L_2[y]=y''+a_0y=0\\ W_{21}=\Omega\{\exp(\sqrt{-a_0}x),\exp(-\sqrt{-a_0}x)\},(a_0<0)\\ W_{22}=\Omega\{\cos\sqrt{a_0}x,\sin\sqrt{a_0}x\},(a_0>0)\end{cases}.$$

3.2 三维不变子空间

由上面类似地计算,可以得出方程(1)中的算子 $F[u]$ 允许的三维不变子空间

定理 3 两个非线性算子 $F[u]$ 允许的三维不变子空间 W_3,它们分别是

$$\begin{cases}F[u]=bu_xu_{xx}+cuu_{xxx}\\ L_3[y]=y'''=0\\ W_3=\Omega\{1,x,x^2\}\end{cases},$$

$$\begin{cases}F[u]=-cu_xu_{xx}+cu_{xxx}\\ L_3[y]=y'''+a_1y'=0\\ W_{31}=\Omega\{1,\exp(\sqrt{-a_1}x),\exp(-\sqrt{-a_1}x)\},(a_1<0)\\ W_{32}=\Omega\{1,\cos\sqrt{a_1}x,\sin\sqrt{a_1}x\},(a_1>0)\end{cases}.$$

3.3 四维不变子空间

定理 4 一个非线性算子 $F[u]$ 允许的三维不变子空间 W_4,它是

$$\begin{cases}F[u]=bu_xu_{xx}+cuu_{xxx}\\ L_4[y]=y^{(4)}=0\\ W_4=\Omega\{1,x,x^2,x^3\}\end{cases}.$$

3.4 五维不变子空间

定理 5 一个非线性算子 $F[u]$ 允许的三维不变子空间 W_5,它是

$$\begin{cases}F[u]=-\dfrac{c}{2}u_xu_{xx}+cuu_{xxx}\\ L_5[y]=y^{(5)}=0\\ W_5=\Omega\{1,x,x^2,x^3,x^4\}\end{cases}.$$

3.5 六维不变子空间

定理 6 一个非线性算子 $F[u]$ 允许的三维不变子空间 W_6,它是

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} F[u] = -\dfrac{3c}{5}u_x u_{xx} + cuu_{xxx} \\ L_6[y] = y^{(6)} = 0 \\ W_6 = \Omega\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\} \end{cases}.$$

3.6　七维不变子空间

定理 7　非线性算子 $F[u]$ 允许的七维不变子空间 W_7 不存在的.

4　举例子求精确解

例　方程 $u_t + u_{xxxxx} = -cu_x u_{xx} + cuu_{xxx}$,

在三维不变子空间中,由定理 3 知解空间为

$W_{31} = \Omega\{1, \exp(\sqrt{-a_1}x), \exp(-\sqrt{-a_1}x)\}$, $(a_1 < 0)$,

$W_{32} = \Omega\{1, \cos(\sqrt{a_1}x), \sin(\sqrt{a_1}x)\}$, $(a_1 > 0)$.

因此,解为

$$u_1(x,t) = d_1(t) + d_2(t)\exp(\sqrt{-a_1}x) + d_3(t)\exp(\sqrt{-a_1}x).$$

其中 $d_i(t)\ (i = 1,2,3)$ 满足条件 $d_1'(t) = 0$,

$a_1 c\sqrt{-a_1}d_1(t)d_3(t) = d_3'(t) - a_1^2\sqrt{-a_1}d_3(t)$,

$-a_1 c\sqrt{-a_1}d_1(t)d_2(t) = d_2'(t) + a_1 2\sqrt{-a_1}d_3(t)$.

解得

$$u_1(x,t) = k_1 + \frac{a^2 k_2}{a_1^2 + 2a_1 ck_1}\exp\{(a_1^2 + a_1 ck_1)\cdot \sqrt{-a_1}t - \sqrt{-a_1}x\} + k_3\exp(-a_1 ck_1\sqrt{-a_1}t) + k_2\exp\{(a_1^2\sqrt{-a_1} + a_1 ck_1\sqrt{-a_1})t + (\sqrt{-a_1}x)\}.$$

$$u_2(x,t) = d_1(t) + d_2(t)\cos(\sqrt{a_1}x) + d_3(t)\sin(\sqrt{a_1}x).$$

其中 $d_i(t)\ (i = 1,2,3)$ 满足条件 $d_1'(t) = 0$,

$d_2'(t) + d_3(t)a_1^2\sqrt{a_1} = -ca_1\sqrt{a_1}d_1(t)d_3(t)$,

$d_3'(t) - d_2(t)a_1^2\sqrt{a_1} = ca_1\sqrt{a_1}d_1(t)d_2(t)$.

解得

$$u_2(x,t) = k_1 + k_2\cos(\sqrt{a_1}x) + k_3\exp(a_1^2\sqrt{-a_1} + a_1 ck_1\sqrt{-a_1})t\sin(\sqrt{a_1}x).$$

5　结　论

本文推出了广义的五阶 KdV 方程的非线性算子 F 允许由常系数常微分方程的解构成的不变子空间,在这些不变子空间上可以构造出方程更多的精确解,此方法也应用于求解其他非线性偏微分方程的不变子空间,从而求出方程尽可能多的精确解.

参　考　文　献

[1] Lie S. Uber die integration durch bestimmte integrable voneiner klasse linearer partieller differential gleich ungen [J]. Arch Math, 1881,6: 328 – 368.

[2] Feng Z S. The first-integral method to study the Burgers-Korteweg-de Vries equation [J]. J Phys A,2002,35(2): 343 – 349.

[3] Bluman G W, Cole J D. The general similarity solution of the heat equation [J]. J Math Mech, 1969,18: 1025 – 1042.

[4] Fokas A S, Liu Q M. Generalized conditional symmetries and exact solutions of nonintegrable equations [J]. Theor Math Phys, 1994,99(2): 263 – 277.

[5] Galaktionov V A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equationswith quadratic nonlinearities [J]. Proc Roy Soc Endin Sect A, 1995, 125(2): 225 – 246.

[6] Zhu C R,Qu C Z. Maximal dimension of invariant subspaces admitted by nonlinear vector differential operator [J]. J Math Phys, 2011, 52(4): 043507.

[7] Qu C Z, Zhu C R. Classification of coupled systems with two-component nonlinear diffusion equations by the invariant subspace method [J]. J Phys A, 2009, 42(47): 1 – 27.

[8] Svirshchevskii S R. Ordinary differential operators possessing invariant subspaces of polynomial type [J]. Comm Non Sci Num Sim, 2004,9: 105 – 115.

[9] Chou K S, Qu C Z. Generalized conditional symmetries of nonlinear differential difference equations [J]. Phys Lett A, 2001,280(5): 303 – 308.

[10] King J R. Exact polynomial solutions to some nonlinear diffusion equations [J]. J Phys D, 1993, 64(3): 35 – 65.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[11] Shen S F, Qu C Z, J Y Y. Maximal dimension of invariant subspaces to systems of nonlinear evolution equations [J]. Chinese Ann Math B, 2012, 33(2): 161 - 178.

[12] Ji L N, Qu C Z. Conditional Lie-Bäcklund conditional symmetries and invariant subspace tononlinear diffusion equation [J]. J Appl Math, 2011, 76(4): 610 - 632.

[13] Ma W X, Liu Y P. Invariant subspaces and exact solutions of a class of dispersive evolution equations [J]. Comm Non Sci Num Sim, 2012, 17(10): 3795 - 3801.

Invariant Subspaces of the Generalized Fifth-order KdV Equation

Zhang Yamin

(Institute of Mathematics and Information Science, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji Shaanxi 721013)

Abstract

The generalized fifth-order KdV (fKdV) equation is considered in this paper. The 2d, 3d, 4d, 5d, 6d invariant subspaces allowed by the nonlinear differential operator in the equation are obtained by invariant subspaces method. More abundant exact solution of the equations are constructed by the gaining the five kind of invariant subspaces. And then, the research of the solutions of these equations is enriched.

Key words: invariant subspaces, conditional Lie-Bäcklund symmetry, exact solution.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net