DOI:10.19789/j.1004-9398.2019.04.003

幂半群上 Green 关系的若干性质*

潘丽静 余保民

(渭南师范学院数理学院,陕西 渭南 714000)

摘要: 本文主要研究了半群 S 的幂半群 $P(S)$ 上 Green 关系的若干性质. 证明了对任意的 $a \in S$, a 在 S 和 $P(S)$ 中的 L 类, R 类, H 类之间的关系. 同时,对完全正则半群 S, 证明了 $P(S)$ 中的两个元素 A,B 在同一 R 类(或同一 L 类, H 类)时, $\mathrm{Id}A = \mathrm{Id}B$.

关键词: 完全正则半群; 幂半群; Green 关系

中图分类号: O152.7

1 引言与基本概念

半群是由一个非空集合 S 及定义在 S 上的一个二元运算组成的代数系统 $(S,\cdot)$,其中要求二元运算满足结合律. 半群代数理论在数学内部(组合数学,图论,符号动力学等)和外部(理论计算机科学,信息科学,生物技术等)的共同推动下,经过七十多年的系统研究,已成为一个研究对象和研究方法都具有自身特色的代数学分支,其研究在国际上方兴未艾[1-4].

设 S 是一个半群,用 $P(S)$ 表示 S 的非空子集全体所成的集合,在 $P(S)$ 上定义如下的二元运算:

$(\forall A,B \in P(S))\quad AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$.

易证,上面定义的二元运算满足结合律,因此, $P(S)$ 关于上面定义的二元运算构成一个半群,称为 S 的幂半群或整体. 关于幂半群及其性质的研究最早始于 1967 年,由 Tamura 和 Shafer 等[5-7]学者提出. 随后,很多学者都从不同角度对幂半群进行了研究. 最近,赵宪钟教授和甘爱萍等人对几类半群的整体决定性进行了研究,证明了 Clifford 半群类满足强同构性质,而具有正则整体的半群类、幂等元半群类、以及正规纯正群类等都是整体决定的.

正则半群是半群代数理论的主流研究领域,完全正则半群(也称为群并半群)则是其中最受关注的研究对象之一,Green 等价关系是研究半群的结构及其性质的最基本和最重要的工具之一. 因此,为了研究一个半群 S 与其幂半群 $P(S)$ 之间的关系,有必要讨论半群 S 及其幂半群 $P(S)$ 中的 Green 关系之间的联系. 本文的主要目的就是研究对于一个给定的完全正则半群 S 及 S 中的元素 a, a 在 S 中的 L、R、H 类与其在 $P(S)$ 中的等价类之间的关系. 我们相信,对这一问题的研究有助于解决完全正则半群的整体决定性问题.

首先回顾 Green 关系的定义.

定义 1[4] 设 S 是一个半群, $a,b \in S$. 在 S 上定义如下的 Green 关系:

(1) $a\mathbf{L}b \Leftrightarrow$ 存在 $x,y \in S^1$,使得 $xa = b, yb = a$;

(2) $a\mathbf{R}b \Leftrightarrow$ 存在 $u,v \in S^1$,使得 $au = b, bv = a$;

(3) $a\mathbf{H}b \Leftrightarrow a\mathbf{R}b$ 且 $a\mathbf{L}b$,即存在 $x,y,u,v \in S^1$,使得 $xa = b, yb = a, au = b, bv = a$.

命题 1[4] (1) $\mathbf{L}$ 是右同余关系; $\mathbf{R}$ 是左同余关系;

(2) $\mathbf{L}\circ\mathbf{R} = \mathbf{R}\circ\mathbf{L}$.

2 幂半群上 Green 关系的性质

如果在半群 S 中有 $a\mathbf{R}b$,则按照定义 1,存在 u, $v \in S^1$,使得 $au = b, bv = a$,从而可以在 S 上定义右平移 $\rho_u : S \to S$ 和 $\rho_v : S \to S$ 如下:

$$\rho_u s = su,\quad \rho_v s = sv\ (s \in S).$$

同样地,若 $a\mathbf{L}b$,即存在 $x,y \in S^1$,使得 $xa = b$, $yb = a$,则可以在 S 上定义左平移 $\lambda_x : S \to S$ 和 λ_v:

收稿日期: 2018-06-08

* 陕西省自然科学基础研究计划项目(2017JM1044);渭南师范学院自然科学研究(17YKS10);渭南师范学院教育科学研究(2016JYKX006);国家统计局(2012LY051);渭南师范学院自然科学研究(18YKS10)资助项目

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$S \to S$ 如下:

$$\lambda_x s = xs, \quad \lambda_y s = ys (s \in S).$$

延用上面的记号,我们有下面的结果:

引理 1[4] (1) 右平移 $\rho_u \mid L_a$ 是 L_a 到 L_b 上的双射; $\rho_v \mid L_b$ 是 L_b 到 L_a 上的双射,且二者互逆;

(2) 左平移 $\lambda_x \mid R_a$ 是 R_a 到 R_b 上的双射; $\lambda_y \mid R_b$ 是 R_b 到 R_a 上的双射,且二者互逆.

完全正则半群是一类非常重要的半群类. 回顾一下,对半群 S,设 $a \in S$,如果存在 $c \in S$ 使得 $a = aca$,则称 a 是 S 中的正则元; 如果存在 $c \in S$ 使得 $a = aca$ 且 $c = cac$,则称 c 是 a 的逆元; 如果存在 $c \in S$ 使得 $a = aca$ 且 $ac = ca$,则称 a 是 S 中的完全正则元; 如果 S 中的每个元素都是完全正则的,则称 S 是一个完全正则半群. 熟知,任一完全正则半群 S 都是完全单半群 S_α 的半格 Y,其中 $\alpha \in Y$,即 $S = [Y; S_\alpha]$. 对 $A \subseteq S = [Y; S_\alpha]$,引入以下记号

$$\mathrm{Id}A = \{\alpha \in Y : A \cap S_\alpha \neq \varnothing\}.$$

以下,我们把单点集 $\{a\}$ 和其所包含的元素 a 不加以区分. 我们分别用 L^S, R^S, H^S 表示半群 S 中的 GreenL, R, H 关系,而用 $L^{P(S)}, R^{P(S)}, H^{P(S)}$ 表示幂半群 $P(S)$ 中的 GreenL, R, H 关系. 对 $a \in S$,我们把 a 在半群 S 和幂半群 $P(S)$ 中的 H 类分别记作 $H_a(S)$ 和 $H_a(P(S))$,即

$$H_a(S) = \{x \in S : x\mathbf{H}a\},$$

$$H_a(P(S)) = \{A \in P(S) : A\mathbf{H}\{a\}\}.$$

类似地可定义 $L_a(S)$, $L_a(P(S))$, $R_a(S)$ 和 $R_a(P(S))$ 等记号.

命题 2 设 S 是一个半群, $a \in S, A \in P(S)$.

(1) 如果 $aR^{P(S)}A$,则 $A \subset R_a(S)$ 且对任意的 $b_1, b_2 \in A$, $b_1 \neq b_2$,在 S 中有 $(b_1, b_2) \notin \mathbf{L}$;

(2) 如果在 $P(S)$ 中 $a\mathbf{L}A$,则 $A \subset L_a(S)$ 且对任意的 $b_1, b_2 \in A$, $b_1 \neq b_2$,在 S 中有 $(b_1, b_2) \notin \mathbf{R}$.

证明 假设在 $P(S)$ 中 $a\mathbf{R}A$,即存在 $X, Y \in P(S)$,使得

$$aX = A, \quad AY = a.$$

则对任意的 $b \in A$,存在 $x \in X, y \in Y$,使得

$$ax = b, \quad by = a,$$

所以在半群 S 中有 $a\mathbf{R}b$,从而有 $A \subset H_a(S)$.

在 Y 中任意取定 y. 对任意的 $b \in A$,有 $a\mathbf{R}b$,同时由引理 1(1),右平移 ρ_y 是 L_b 到 L_a 双射. 因此,当 $b_1 \in A$ 且 $b_1 \neq b$ 时, $b_1 \notin L_b$,也就是说, $(b_1, b) \notin \mathbf{L}$.

对偶的可证明(2)成立.

命题 3 对任意的 $a \in S$,都有 $H_a(S) = H_a(P(S))$,即 a 在 S 中的 H 类和 $\{a\}$ 在 $P(S)$ 中的 H 类相同.

证明 设 $a \in S$, $b \in H_a(S)$,则存在 $x, y, u, v \in S^1$,使得

$$ax = b, by = a, ua = b, vb = a,$$

从而在 $P(S)$ 中有

$$\{a\}\{x\} = \{b\}, \{b\}\{y\} = \{a\},$$

$$\{u\}\{a\} = \{b\}, \{v\}\{b\} = \{a\},$$

所以 $b \in H_a(P(S))$. 因此 $H_a(S) \subset H_a(P(S))$. 反之,任取 $A \in H_a(P(S))$,则在 $P(S)$ 有 $a\mathbf{R}A$ 且 $a\mathbf{L}A$. 由命题 2, $A \subset L_a(S) \cap R_a(S) = H_a(S)$. 同时,由命题 2,对任意 $b_1, b_2 \in A$,当 $b_1 \neq b_2$ 时有 $(b_1, b_2) \notin \mathbf{L}$ 且 $(b_1, b_2) \notin \mathbf{R}$,所以 $|A| = 1$,进而有 $H_a(S) = H_a(P(S))$.

命题 4 设 $S = S[Y; S_\alpha; \varphi_{\alpha,\beta}]$ 是完全正则半群, $P(S)$ 是 S 的幂半群, $A, B \in P(S)$. 如果 $A\mathbf{R}B$, $A\mathbf{L}B$, $A\mathbf{H}B$ 中有一个成立,则 $\mathrm{Id}A = \mathrm{Id}B$.

证明 任给 $M, N \in S$,由文[10]可知, $\mathrm{Id}(AB) = (\mathrm{Id}A)(\mathrm{Id}B)$. 设 $A\mathbf{R}B$,则存在 $X, Y \in P(S)$,使得 $AX = B, BY = A$. 从而有

$$(\mathrm{Id}A)(\mathrm{Id}X) = \mathrm{Id}B, \quad (\mathrm{Id}B)(\mathrm{Id}Y) = \mathrm{Id}A.$$

任取 $\alpha \in \mathrm{Id}A$,由 $(\mathrm{Id}B)(\mathrm{Id}Y) = \mathrm{Id}A$ 可知,存在 $\beta \in \mathrm{Id}B$,使得 $\alpha \leqslant \beta$,又由 $(\mathrm{Id}A)(\mathrm{Id}X) = \mathrm{Id}B$ 可知,存在 $\gamma \in \mathrm{Id}X$,使得 $\beta \leqslant \gamma$. 因此 $\alpha \leqslant \gamma$. 进一步,有

$$\alpha = \alpha\gamma \in (\mathrm{Id}A)(\mathrm{Id}X) = \mathrm{Id}B.$$

所以 $\mathrm{Id}A \subset \mathrm{Id}B$. 对偶的可证明 $\mathrm{Id}B \subset \mathrm{Id}A$. 因此 $\mathrm{Id}A = \mathrm{Id}B$. 类似的可证明 $A\mathbf{L}B$ 或 $A\mathbf{H}B$ 时, $\mathrm{Id}A = \mathrm{Id}B$.

参 考 文 献

[1] CLIFFORD A H, PRESTON G B. The algebraic theory of semigroups [M]. Providence: American Mathematical Society, 1961.

[2] PAZY A. Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[3] HOWIE J M. Automata and languages [M]. Oxford: Clarendon Press, 1991.
[4] HOWIE J M. Fundamentals of semigroup theory [M]. Oxford: Clarendon Press, 1995.
[5] TAMURA T. Unsolved problems on semigroups [R]. Kyoto: Seminar Reports of Math Sci, 1967.
[6] TAMURA T, SHAFER J. Power semigroups [J]. Math Japon, 1967, 12, 25 - 32.
[7] TAMURA T, SHAFER J. Power semigroups II [J]. Notices, 1968, 15: 395.
[8] ALMEIDA J. Power semigroups: results and problems [J]. Algebraic Engineering, 1999, 399 - 415.
[9] GOULD M, ISKRA J A. Globally determined classes of semigroups [J]. Semigroup Forum, 1984, 28: 1 - 11.
[10] GAN A P, ZHAO X Z. Global determinism of clifford semigroups [J]. J Aust Math Soc, 2014, 97: 63 - 77.

Some Properties of Green´s Relation on Power Semigroups

PAN Lijing YU Baomin

(School of Mathematics and physics, Weinan Normal University, Weinan Shaanxi 714000)

Abstract: The paper gives a semigroup S, some properties of Green´s relation on the power semigroup $P(S)$ of S are studied. The relations of the L-class $L_a(S)$ (the R-class $R_a(S)$, the H-class $H_a(S)$, respectively) and the L-class $L_a(P(S))$ (the R-class $R_a(P(S))$, the H-class $H_a(P(S))$, respectively) are discussed. Also, it is proved that for any $A, B \in P(S)$, $\mathrm{Id}A = \mathrm{Id}B$ if either $AL^{P(S)}B$ or $AR^{P(S)}B$.

Keywords: completely regular semigroup; power semigroup; Green´s relation

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net