首都师范大学学报(自然科学版)
第41卷 第1期 Journal of Capital Normal University No. 1
2020年2月 (Natural Science Edition) Feb. ,2020

基于STEM教育理念的线性代数可视化教学实践

王晓明[1,2] 朱一心[1]

(1. 首都师范大学数学科学学院,北京 100048; 2. 山东交通学院理学院,山东 济南 250307)

摘要:STEM(科学、技术、工程和数学)教育是当前国际教育研究和改革的热点问题. 跨学科性是其核心特征. 本文结合STEM教育的核心特征,以线性代数课程中矩阵及矩阵计算的教学为例,融合数字图像处理的基础技术,设计了具体的可视化教学案例,引导学生将书本上的知识和实践应用结合起来,对信息化技术与教学融合的可行性进行了实践探索.

关键词:STEM教育; 矩阵;矩阵计算;可视化;数字图像处理

中图分类号:O13;G420 **DOI**:10.19789/j.1004-9398.2020.01.011

0 引 言

线性代数是高等院校理工、经济、管理等专业必修的基础课. 由于课程内容具有较强抽象性,所以在教学中加入可视化的数学实验演示,有助于对内容的理解[1]. 以往可视化教学局限于对数学概念的解释. 如孔祥强和刘秀英[2]提到利用Maple软件的动画功能做出函数的一阶、二阶导数的图形、极坐标系下的曲线图形、球顶锥体的立体图形等. 孙欣等[1]利用Matlab软件做出二次型及其标准型的图形,从而解释了二次曲线在正交变换下的几何图形保持不变;做出正定(负定)二次型的图形,从图形上解释了这2种二次型的不同. 这些可视化内容只是做出数学概念的具体图形,局限于对数学概念的解释,并没有帮助到学生理解和掌握数学概念与实际技术、工程中的应用的联系.

STEM(科技、技术、工程和教学)教育是当前国际教育界探索21世纪新型态能力培养的重要理念和举措[3],旨在加强科学、技术、工程、数学等学科的整合,加强知识概念与现实世界经验之间的联系,强调问题导向,进而引导学习者进行深度学习,是一种跨学科综合教育的形态[4]. 结合STEM教育理念,本文以线性代数课程中矩阵及矩阵计算的教学为例,融合数字图像处理的基础技术,设计了具体的可视化教学案例,引导学生将书本上的知识和实践应用结合起来,是对信息化技术与教学融合的有益探索.

1 线性代数的可视化教学案例

线性代数理论性强、抽象度高,难以直观理解. 本案例将《数字图像处理(Matlab版)》[5]中的图像基本操作引入到大学线性代数“矩阵及矩阵计算”相关概念的教学中,一方面增强学生对矩阵及计算方法的理解,另一方面也直观地展示了矩阵相关知识在科学技术中的具体应用.

1.1 矩阵及其运算概念讲解

矩阵的数学定义及矩阵计算定义. 参见教材[6],此处不赘述. 面对抽象的矩阵定义以及矩阵计算,学生初步接触会产生疑问:为什么要定义矩阵? 定义有什么意义? 为什么针对矩阵要定义如此的计算? 当然可以举例线性方程组系数矩阵来说明这样定义有意义,但毕竟还是数学范围内的概念,仍脱离不了抽象感.

1.2 应用举例

事实上矩阵是一般二维信息的常规表述方式,针对二维信息的处理也是以矩阵基本计算为基础的. 数字图像就是一个直观的例子. 黑白图像数字化后本身就是以矩阵形式存储.

(1)数字图像的矩阵表示.

八位单通道数字图像(黑白照片)通过0~255

收稿日期:2019-02-22

首都师范大学学报(自然科学版)

这 256 个整数表示由黑到白的 256 个灰度阶,将由黑到白的亮度变化平均分成 256 份,数值越大,亮度越高. 由于图像是二维分布的,所以在计算机内通常以矩阵形式存储. 图 1 为 1 个 512 × 512 的图像,其数据对应于一个 512 × 512 的矩阵. 为了直观展示图像与矩阵的对应关系,放大其中 1 个5 × 5 的局部区域,并标明其每个像素位置的亮度值.



图 1　灰度图像及亮度值

(2)图像亮度变化与矩阵加法.

通过矩阵加法可以改变图像的亮度. 比如图 1 的每个元素给定同样增量,增量为正,则亮度提升,如图 2(a)所示;反之亮度降低,如图 2(b)所示. 矩阵计算的局部演示如下式所示:

$$\begin{pmatrix}145&150&145&134&125\\137&119&119&121&131\\127&111&122&137&153\\114&129&147&165&176\\136&147&174&189&182\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}50&50&50&50&50\\50&50&50&50&50\\50&50&50&50&50\\50&50&50&50&50\\50&50&50&50&50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}195&200&195&184&175\\187&169&169&171&181\\177&161&172&187&203\\164&179&197&215&226\\186&197&224&239&232\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}145&150&145&134&125\\137&119&119&121&131\\127&111&122&137&153\\114&129&147&165&176\\136&147&174&189&182\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-50&-50&-50&-50&-50\\-50&-50&-50&-50&-50\\-50&-50&-50&-50&-50\\-50&-50&-50&-50&-50\\-50&-50&-50&-50&-50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}95&100&95&84&75\\87&69&69&71&81\\77&61&72&87&103\\64&79&97&115&126\\86&97&124&139&132\end{pmatrix}.$$

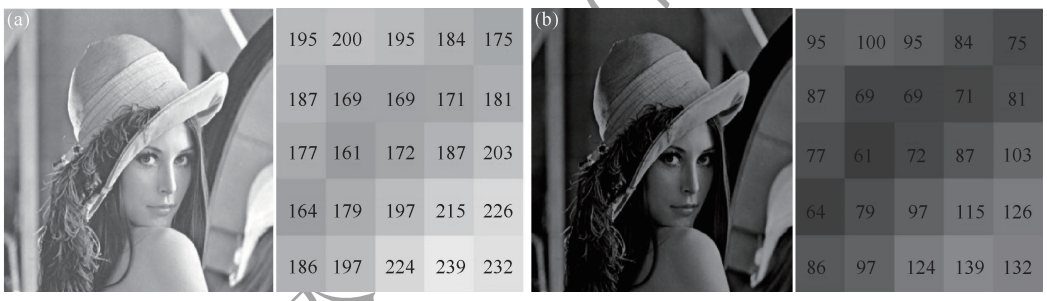


图 2　图像亮度变化效果

(a)亮度提升;(b)亮度降低

(3)图像底片效果与矩阵减法.

通过一张白色图像与原始图像做差,可以得到底片反转的效果,如图 3 所示. 具体计算如下式所示,一个所有元素为 255 的矩阵减去原始图像矩阵为:

$$\begin{pmatrix}255&255&255&255&255\\255&255&255&255&255\\255&255&255&255&255\\255&255&255&255&255\\255&255&255&255&255\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}145&150&145&134&125\\137&119&119&121&131\\127&111&122&137&153\\114&129&147&165&176\\136&147&174&189&182\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}110&105&110&121&130\\118&136&136&134&124\\128&144&133&118&102\\141&126&108&90&79\\119&108&81&66&73\end{pmatrix}.$$

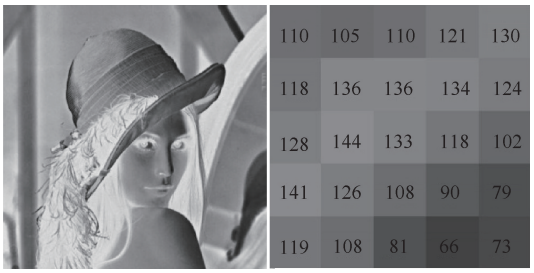


图 3　底片反转效果

首都师范大学(自然科学版)

(4)图像亮度、对比度调节与矩阵数乘.

原图乘一个 >1 的数,将提升图像亮度和对比度,如图 4(a)所示,原图乘一个 <1 的数,将降低图像亮度和对比度,如图 4(b)所示,局部计算如下所示:

$$2\times\begin{pmatrix}145&150&145&134&125\\137&119&119&121&131\\127&111&122&137&153\\114&129&147&165&176\\136&147&174&189&182\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}290&300&290&268&250\\274&238&238&242&262\\254&222&244&274&306\\228&258&294&330&352\\272&294&348&378&364\end{pmatrix}\xrightarrow{[0,255]\text{ 截断}}\begin{pmatrix}255&255&255&255&250\\255&238&238&242&255\\254&222&244&255&255\\228&255&255&255&255\\255&255&255&255&255\end{pmatrix},$$

$$0.5\times\begin{pmatrix}145&150&145&134&125\\137&119&119&121&131\\127&111&122&137&153\\114&129&147&165&176\\136&147&174&189&182\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}73&75&73&67&63\\69&60&60&61&66\\64&56&61&69&77\\57&65&74&83&88\\68&74&87&95&91\end{pmatrix}.$$



图 4 图像亮度、对比度变化效果

(a)对比度、亮度提升;(b)对比度、亮度降低

(5)图像线性叠加与矩阵线性计算.

图像线性叠加可以通过矩阵的线性相加得到,叠加效果如图 5 所示. 下式展示了图像局部线性叠加的过程:

$$0.5\times\begin{pmatrix}145&150&145&134&125\\137&119&119&121&131\\127&111&122&137&153\\114&129&147&165&176\\136&147&174&189&182\end{pmatrix}+0.5\times\begin{pmatrix}169&181&178&178&178\\173&182&179&179&174\\171&176&177&175&176\\170&174&177&177&181\\174&174&177&184&183\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}157&165.5&161.5&156&151.5\\155&150.5&149&150&152.5\\149&143.5&149.5&156&164.5\\142&151.5&162&171&178.5\\155&160.5&175.5&186.5&182.5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{四舍五入取整}}\begin{pmatrix}157&166&162&156&152\\155&151&149&150&153\\149&144&150&156&165\\142&152&162&171&179\\155&161&176&187&183\end{pmatrix}.$$



图 5 通过矩阵线性计算得到的图像叠加效果

(a)与图 1 进行叠加的图像;(b)图像叠加效果

图像线性叠加是生成视频线性转场效果(由一幅图像渐变为另一幅图像)的主要方式. 设 A、B 对应于两个图像(矩阵),A 到 B 完整的线性转场效果模型为:$(1-\alpha)A+\alpha B$,其中 α 从 0 连续变化到 1. 在课堂教学中可以利用 α 变化设计动画,展示完整的转场过程.

(6)矩阵运算拓展.

在课堂上,除了展示课本上矩阵计算对应的案例,还可以增加课外的矩阵计算方法,一方面可以拓展学生思路,使学生知识域不局限于书本;另一方面也可以加深学生对知识应用的理解,培养创新能力. 如针对图像处理与矩阵计算的关系,可以再增加卷积的知识,不必展开描述,点到即可.

卷积在信号处理里具有广泛应用,是图像处理的基本操作之一. 其是一种线性运算,应用在图像处理中又称图像滤波. 图像的卷积计算由图像矩阵与 1 个滤波器矩阵通过下面方式完成:对图像中每个点,计算邻域和滤波器矩阵的对应元素的乘积,然后叠加,作为该位置的新值,具体公式如下:

$$H(x,y)=\sum_{i=-m}^{m}\sum_{j=-n}^{n}F(i,j)G(x+i,y+j),$$

其中, G 为原图像,F 为滤波器矩阵,H 为滤波后的图像. 具体计算过程如图 6 所示.

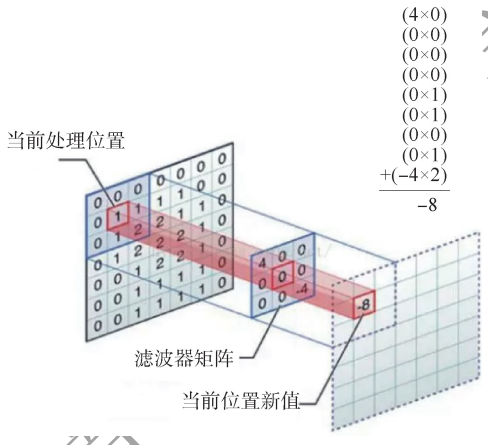


图 6　图像卷积计算示意

下面给出几种常用的卷积矩阵,如:锐化滤波器矩阵、模糊滤波器矩阵和浮雕滤波器矩阵的卷积矩阵,具体分别是:

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&9&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1/9&1/9&1/9\\1/9&1/9&1/9\\1/9&1/9&1/9\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

其对应的处理效果见图 7.

由上述例子可以看出,图像滤波实际上就是把 1 个点的像素值用它邻域点的像素值的加权平均代替. 如模糊滤波器矩阵,就是用平均加权达到模糊效果,邻域选择越大,模糊效果越强. 而浮雕滤波器矩阵,当其左上角的像素值相对右下角较大时,滤波后变成暗色,形成凹陷阴影效果,且像素值差距越大,凹陷阴影效果越明显;反之若右下角的像素值相对左上角较大时,滤波后变成亮色,形成凸起受光效果,像素值差距越大,凸起受光效果越明显. 理解了图像滤波的内在含义,就可以通过选择邻域 (m,n) 大小和精心设计权值来构造滤波器矩阵,从而基于矩阵卷积运算达到预期的图像处理效果. 课堂教学中,可以引导学生独立设计滤波器矩阵,以加强对卷积计算的理解,如设计浮雕滤波器矩阵,实现光从左下角照射的浮雕效果.

1.3　抽象提升

数字图像处理案例的引入,使学生很直观地感受到了矩阵定义的实用价值以及矩阵运算在实际生活中的具体使用方式、效果. 提升了学生对矩阵相关知识点的认识深度与应用能力,与日常生活的具体事物相联系,对事物本身的认识深度提高. 通过运算拓展,使学生认识到数学概念并不是封闭的、一成不变的,而是开放性的,相关概念可以根据需求拓展.

上述具体应用案例,展示了以图像为代表的二维信息处理与矩阵概念及计算方法的关系,表明一



图 7　通过锐化滤波器、模糊滤波器和浮雕滤波器产生的滤波效果

学报(自然科学版)

般二维信息处理,都可以借助矩阵及矩阵计算实现.这时学生再去理解课本上针对抽象数字的矩阵计算例题、习题,就不再感觉言之无物而将矩阵、矩阵计算看作数字游戏.

2 案例特点

本教学案例将图像处理与数学相结合,为数学课程教学设计提供了一定的借鉴作用.包括:(1)图像处理基础内容简单,适用于普通教师很快掌握;(2)研究对象直观,方便学生理解.信息技术的发展、手机的普遍使用,使数字图像应用在生活中已司空见惯.图像与数学概念相关联,实现数学对象可视化,图像处理技术同数学计算相对应,实现了计算过程的可视化;(3)图像处理是 AI 技术基础,是现代科技前沿领域.数学与前沿领域的结合,更容易引起学生兴趣,同时也有利于学生对相关领域技能的认识和培养;(4)Matlab 有图像处理工具包支持,容易上手.本案例实验由 Matlab 编程完成.

3 结束语

弗赖登塔尔说:"要保证有活力(是指数学知识的活力),就必须教给学生充满着联系的数学."[7] STEM 教育不是教授学生抽象、孤立的学科知识,而是加强了科学、技术、工程、数学等学科的整合,把学生学习的零碎知识变成相互联系的统一整体.结合 STEM 教育理念的跨学科整合这一核心特征,本文设计了矩阵及其运算的教学案例,将数字图像处理的基础技术应用到教学课堂中,以可视化形式、跨学科的知识关联,将矩阵的相关概念在具体应用案例中予以呈现,在增强学生知识理解的同时,让学生也认识到线性代数广泛的应用领域,培养学生的学习兴趣,拓宽学生的视野.此案例抛砖引玉,为信息技术融入到数学课程的教学实践起到了一定的借鉴作用.

参 考 文 献

[1] 孙欣,冯艳,吴志丹,等. Matlab 软件可视化效果在大学数学中的应用[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版),2014,32(4):549 - 552.

[2] 孔祥强,刘秀英. Maple 软件的动态可视化功能在大学数学教学中的应用探索[J]. 江汉大学学报(自然科学版),2018,46(2):130 - 135.

[3] 黄桦. 基于 STEM 教育理念的科学教学[J]. 教学与管理,2018,7:109 - 112.

[4] 李婧. STEM 教育理念对科学教育实践的三大启示[J]. 中小学信息技术教育,2018,10:45 - 47.

[5] 冈萨雷斯. 数字图像处理(Matlab 版)[M]. 北京:电子工业出版社,2005.

[6] 郝志峰,谢国瑞,方文波,等. 线性代数[M]. 北京:高等教育出版社,2008.

[7] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 陈昌平,唐瑞芬,译. 上海:上海教育出版社,1995.

Visual Linear Algebra Teaching Practice Based on STEM

WANG Xiaoming[1,2] ZHU Yixin[1]

(1. School of Mathematical Science, Capital Normal University, Beijing 100048;
2. School of Science, ShanDong JiaoTong University, Jinan Shandong 250307)

Abstract: The STEM (science, technology, engineering and mathematics) education has become a hot point of the current international education research and reform. Interdisciplinarity is the core characteristics of the STEM education. In this paper, on the basis of the core characteristics of the STEM education, we have designed some visual teaching cases, which integrate the basic technology of digital image processing and the example of matrix and matrix calculation from linear algebra. This can guide students to combine knowledge with practice. The feasibility of integration of information technology and teaching are explored in practice.

Keywords: STEM education; matrix; matrix calculation; visual; digital image processing

首都师范大学学报(自然科学版)