DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.06.002

$\mathbf{R}^5$ 中的4阶 Willmore 旋转超曲面*

李建祥
(保山学院数学学院,云南 保山 678000)

摘 要

文章考虑了欧氏空间中的高阶 Willmore 超曲面,给出欧氏空间 $\mathbf{R}^5$ 中4阶 Willmore 旋转超曲面的微分方程,然后给出 $\mathbf{R}^5$ 中一类4阶 Willmore 旋转超曲面的实例.

关键词: 共形不变量,n 阶 Willmore 泛函,4阶 Willmore 超曲面.
中图分类号: O186.1

0 引 言

在微分几何学中,体积和曲率是最基本的研究对象. 反过来体积与曲率之间的等式或不等式也决定了几何元素的性质. 超曲面作为一类特殊的子流形,是微分几何理论研究中一个相当活跃的对象. 特别是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中超曲面的研究比较丰富.

设 $x: M^n \to N^{n+1}$ 为 n 维黎曼流形 M^n 到 $n+1$ 维黎曼流形 N^{n+1} 的等距浸入超曲面,g_{ij} 是由浸入 x 诱导的黎曼度量,h_{ij} 是 M^n 的第二基本形式,特征方程 $\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$ 的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 称为 M^n 在点 x 的主曲率,M^n 在点 x 的第 r 个平均曲率 σ_r 定义为:

$$\sigma_r = \frac{1}{C_n^r} \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \lambda_1 \cdots \lambda_r, r = 1, \cdots, n, \quad (1.1)$$

其中 C_n^r 是二项式系数. 为方便起见,规定 $\sigma_0 = 1$.

在[1]中,W. Blaschke 证明了泛函 $W(M) = \int_M \sigma_1^2 dM$ 是共形不变的. 1965年,T. J. Willmore 研究了上述泛函,其证明了在3维欧氏空间中单位圆周沿一条空间闭曲线生成的管状闭曲面满足 $W(M) \geqslant 2\pi^2$ 且等号成立的条件是 M 为标准环[2],并且提出了著名的 Willmore 猜想:对于任意光滑拓扑环上述不等式成立. 由于 Willmore 的这个贡献,现称 W 为 Willmore 泛函,称上述泛函的极值曲面为 Willmore 曲面.

对于一般的维数 n,1974年 Chen B. Y. 在[3]中证明了泛函:

$$W(M) = \int_M (\sigma_1^2 - \sigma_2)^{\frac{n}{2}} dM \quad (1.2)$$

是共形不变的,也称为 Willmore 泛函.

后来,Guo Z. 对 Willmore 问题做了进一步的研究,在[4]中证明了:若 M^n 为黎曼流形 N^{n+1} 中的等距浸入超曲面,那么对任何整数 $r, 2 \leqslant r \leqslant n$,泛函:

$$W_r(M) = \begin{cases} \int_M Q_r^{\frac{n}{r}} dM, r < n \text{ 且 } r \text{ 为奇数}; \\ \int_M |Q_r|^{\frac{n}{r}} dM, r < n \text{ 且 } r \text{ 为偶数}; \\ \int_M Q_r dM, r = n. \end{cases} \quad (1.3)$$

是 M^n 在 N^{n+1} 中的共形不变量. 其中 $Q_r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{k+1} C_r^k \sigma_1^{r-k} \sigma_k$. 并称上述泛函 $W_r(M)$ 为广义 Willmore 型泛函. 他对(1.3)式在 Q_r 半定时的泛函 $W_r(M)$ 变分后,得到了该泛函极值条件的 Euler-Lagrange 方程:

$$\Delta(Q_r^{\frac{n-r}{r}}(Q_{r-1} + \sigma_1^{r-1})) + (C_{n-1}^{r-1})^{-1} \sum_{k=2}^{r} (-1)^{k+1} \cdot C_{n-k}^{r-k} T_{(k-1)ij}(Q_r^{\frac{n-r}{r}} \sigma_1^{r-k})_{ij} + Q_r^{\frac{n-r}{r}}(n^2\sigma_1^2 - n(n-1)\sigma_2 + nc)(Q_{r-1} + \sigma_1^{r-1}) - n\sigma_1 Q_r^{\frac{n}{r}} + Q_r^{\frac{n-r}{r}} (C_{n-1}^{r-1})^{-1} \sum_{k=2}^{r} (-1)^{k+1} C_{n-k}^{r-k} C_n^k \sigma_1^{r-k} (n\sigma_1\sigma_k - (n-k)\sigma_{k+1} + ck\sigma_{k-1}) = 0 \quad (1.4)$$

特别地 $r = n$ 时,有:

收稿日期:2016-02-03
* 云南省教育厅科学研究基金资助项目(2015Y476);保山学院教学质量与教学改革工程项目(15B002JY).

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\Delta(Q_{n-1}+\sigma_1^{n-1})+\sum_{k=2}^{r}(-1)^{k+1}T_{(k-1)ij}(\sigma_1^{n-k})_{,ij}+(n^2\sigma_1^2-n(n-1)\sigma_2+nc)(Q_{n-1}+\sigma_1^{n-1})-n\sigma_1Q_n+\sum_{k=2}^{r}(-1)^{k+1}C_n^k\sigma_1^{n-k}(n\sigma_1\sigma_k-(n-k)\sigma_{k+1}+ck\sigma_{k-1})=0,\tag{1.5}$$

其中 c 为常曲率空间 N 的截曲率. $T_{(k)}=S_kI-S_{k-1}A+\cdots+(-1)^{k-1}S_1A^{k-1}+(-1)^kA^k$, $k=0,1,\cdots,n$(其中 $S_k=C_n^k\sigma_k$) 为关于 $A=(h_{ij})_{n\times n}$ 的第 k 个 Newton 变换. 把满足(1.5)的超曲面称为 W_r— 极小超曲面.

本文将上述思想运用到 5 维欧氏空间. 首先,在第二部分里给出欧氏空间 $\mathbf{R}^5$ 中 4 阶 Willmore 旋转超曲面的微分方程; 第三部分给出方程的一类特解,得到了 $\mathbf{R}^5$ 中一类 4 阶 Willmore 旋转超曲面的实例.

1 $\mathbf{R}^5$ 中 4 阶 Willmore 旋转超曲面的微分方程

由问题的一般性,在开头部分我们先对一般的维数 n 进行讨论,设 S^{n-1} 是 n 维欧氏空间 R^n 中的单位球, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是 S^{n-1} 在 R^n 中的位置向量. $\gamma=(\alpha,\beta):R^1\to R^2$ 是 R^2 中一条光滑曲线,我们考虑 Warp 乘积浸入 ϕ: $R^1\times S^{n-1}\to R^{n+1}$, 即旋转超曲面. 定义为:

$$\phi(t,\xi)=(\alpha\xi,\beta).\tag{2.1}$$

在 S^{n-1} 上选取局部单位正交切标架场{$\tilde{e}_a$,$2\leqslant a\leqslant n$},对偶标架场为{$\tilde{\omega}_a$},我们约定:

$$1\leqslant i,j,k,\cdots\leqslant n;\quad 2\leqslant a,b,c,\cdots\leqslant n.$$

则 S^{n-1} 的结构方程如下:

$$d\xi=\sum_a\tilde{\omega}_a\tilde{e}_a,\tag{2.2}$$

$$d\tilde{e}_a=\sum_b\tilde{\omega}_{ab}\tilde{e}_b-\tilde{\omega}_a\xi.\tag{2.3}$$

显然, $\left\{\frac{d}{dt},\tilde{e}_2,\cdots,\tilde{e}_n\right\}$ 是 $\mathbf{R}^1\times S^{n-1}$ 的局部切标架场,由于

$$\phi_*\left(\frac{d}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(\phi)=(\alpha'\xi,\beta'),\tag{2.4}$$

$$\phi_*(\tilde{e}_a)=\tilde{e}_a(\phi)=(\alpha\tilde{e}_a,0).\tag{2.5}$$

令

$$e_1=\frac{1}{|\gamma'|}(\alpha'\xi,\beta'),\ e_a=(\tilde{e}_a,0),$$

$$e_{n+1}=\frac{1}{|\gamma'|}(-\beta'\xi,\alpha').\tag{2.6}$$

则 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbf{R}^1\times S^{n-1}$ 的局部正交切标架场, e_{n+1} 是法标架. $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的对偶标架为 $\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,则 ϕ 的结构方程如下:

$$d\phi=\omega_1e_1+\sum_a\omega_ae_a,\tag{2.7}$$

$$de_1=\sum_a\omega_{1a}e_a+\sum_j h_{1j}\omega_je_{n+1},\tag{2.8}$$

$$de_a=\omega_{a1}e_1+\sum_b\omega_{ab}e_b+\sum_j h_{aj}\omega_je_{n+1},\tag{2.9}$$

$$de_{n+1}=-\sum_j h_{1j}\omega_je_1-\sum_{a,j}h_{aj}\omega_je_a,\tag{2.10}$$

其中 ω_{ij}, h_{ij} 分别为 $\mathbf{R}^1\times S^{n-1}$ 的联络形式和第二基本形式,满足:

$$\omega_{ij}+\omega_{ji}=0,\quad h_{ij}=h_{ji},$$

外微分(2.1),(2.6). 利用(2.2),(2.3),对比(2.7)–(2.10),我们有:

$$\omega_1=|\gamma'|dt,\quad \omega_a=\alpha\tilde{\omega}_a,\tag{2.11}$$

$$\omega_{1a}=\frac{\alpha'}{\alpha|\gamma'|}\omega_a,\quad \omega_{ab}=\tilde{\omega}_{ab},\tag{2.12}$$

$$h_{11}=\frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{|\gamma'|^3},\quad h_{1a}=0,h_{ab}=\frac{\beta'}{\alpha|\gamma'|}\delta_{ab}.\tag{2.13}$$

为方便,记

$$\lambda=\frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{|\gamma'|^3},\quad \mu=\frac{\beta'}{\alpha|\gamma'|}.\tag{2.14}$$

对于 $\mathbf{R}^1\times S^{n-1}$ 上的光滑函数 f,定义它的一阶,二阶协变导数以及 Laplacian 如下:

$$df=\sum_i f_i\omega_i,\quad f_{i,j}\omega_j=df_i+\sum_j f_j\omega_{ji},\quad \Delta f=\sum_i f_{i,i}.\tag{2.15}$$

于是有:

引理 2.1 [5]: 对于定义在 $\mathbf{R}^1\times S^{n-1}$ 上的光滑函数 $f(t)$,有:

$$\Delta f=\frac{1}{|\gamma'|}\left(\frac{f'}{|\gamma'|}\right)'+(n-1)\frac{\alpha f'}{\alpha|\gamma'|^2}.\tag{2.16}$$

以下考虑 $n=4$ 的情形. 由于欧氏空间 $\mathbf{R}^5$ 中,截曲率 $c=0$,将引理 2.1 应用于方程(1.5)则易求得:

引理 2.2 由(2.1)式所定义的超曲面 ϕ 是 4 阶 Willmore 超曲面当且仅当 ϕ 满足如下方程:

$$\frac{1}{|\gamma'|^2}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}C_3^k\sigma_1^{1-k}\left[(3-k)(2-k)\sigma_1^2\sigma_k+2(3-k)\sigma_1\sigma_1'\sigma_k'+(3-k)\sigma_1\sigma_1''\sigma_k+\sigma_1^2\sigma_k''+\left(3\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{|\gamma'|'}{|\gamma'|}\right)((3-k)\sigma_1\sigma_1'\sigma_k+\sigma_1^2\sigma_k')\right]+$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{1}{|\gamma'|^2}\sum_{k=2}^{3}(-1)^{k+1}C_3^k\sigma_1^{2-k}\left[k\mu^{k-1}\left((3-k)\sigma_1^2+\sigma_1\sigma''_1-\frac{|\gamma'|'}{|\gamma|}\sigma_1\sigma'_1\right)+(k(k-1)\lambda+k(4-k)\mu)\cdot\mu^{k-2}\frac{\alpha'}{\alpha}\sigma_1\sigma'_1\right]+\sum_{k=2}^{3}(-1)^{k+1}\sigma_1^{3-k}C_3^k\left[4\sigma_1^2\sigma_k-3\sigma_2\sigma_k-\sigma_1\sigma_{k+1}\right]+36\sigma_1^{n-1}(\sigma_1^2-\sigma_2)=0. \quad (2.17)$$

根据 σ_r 的定义(1.1)有:

$$\sigma_k=\frac{1}{4}\mu^{k-1}(k\lambda+(4-k)\mu), \quad (2.18)$$

$$\sigma'_k=\frac{k}{4}\mu^{k-2}(\lambda'\mu+(k-1)\lambda\mu'+(4-k)\mu\mu'), \quad (2.19)$$

$$\sigma''_k=\frac{k}{4}\mu^{k-3}\left[(k-1)\lambda'\mu\mu'+(k-1)\cdot(k-2)\lambda\mu'^2+(k-1)(4-k)\mu\mu'^2+\lambda''\mu^2+(k-1)\lambda\mu\mu''+(4-k)\mu^2\mu''\right]. \quad (2.20)$$

将上述三式代入(2.17)并化简,可以得到:

定理 2.1　由(2.1)式所定义的旋转超曲面 ϕ 是 4 阶 Willmore 旋转超曲面当且仅当 ϕ 满足如下方程:

$$\frac{1}{|\gamma'|^2}\{18(4\lambda+11\mu)\lambda'^2+24(17\lambda+49\mu)\lambda'\mu'+6(101\lambda+298\mu)\mu'^2+18(6\lambda^2+35\lambda\mu+52\mu^2)\lambda''+6(17\lambda^2+98\lambda\mu+146\mu^2)\mu''+3\left(3\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{|\gamma'|'}{|\gamma'|}\right)\cdot[12\lambda^2+68\lambda\mu+101\mu^2)\lambda'+(34\lambda^2+202\lambda\mu+307\mu^2)\mu']-3\left[2\frac{\alpha'}{\alpha}\lambda^2+2\left(4\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{|\gamma'|'}{|\gamma'|}\right)\lambda\mu+\left(11\frac{\alpha'}{\alpha}-5\frac{|\gamma'|'}{|\gamma'|}\right)\mu^2\right](\lambda'+3\mu')\}+[9(\lambda+3\mu)^3-2\mu(\lambda+2\mu)^2](\lambda-\mu)^2=0. \quad (2.21)$$

2　R^5 中 4 阶 Willmore 旋转超曲面的实例

在这一节,我们试图求解方程(2.21),找到 $\mathbf{R}^5$ 中 4 阶 Willmore 旋转超曲面,为此,我们需要用到如下引理:

引理 3.1 [5]: 对于光滑曲线 $\gamma=(\alpha,\beta):I\to\mathbf{R}^2$,其中 α,β 是区间 I 上的光滑函数,且 $\alpha\neq 0$. 我们可以适当选择 γ 的参数 t,使得 $|\gamma'|^2=\alpha^2$.

亦即:

$$|\gamma'|^2=(\alpha')^2+(\beta')^2=\alpha^2. \quad (3.1)$$

在下面的计算中,我们假定 $\alpha>0$. 这样,γ 便与旋转轴 x^5 轴无交点. 此时,$|\gamma'|=\alpha$,引入双曲函数:

令

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}=\frac{1}{\cosh y(t)},\quad \frac{\beta'(t)}{\alpha(t)}=\tanh y(t), \quad (3.2)$$

其中 y 是 $\mathbf{R}^1$ 上的函数. 由(2.14)及(3.2)我们有:

$$\lambda=\frac{y'}{\alpha\cosh y},\quad \mu=\frac{\sinh y}{\alpha\cosh y} \quad (3.3)$$

通过计算可得:

$$\lambda'=\frac{y''\cosh y-y'^2\sinh y-y'}{\alpha\cosh^2 y},\quad \mu'=\frac{y'-\sinh y}{\alpha\cosh^2 y}. \quad (3.4)$$

观察(2.21),结合(3.1)–(3.4)可以发现,如果 $y'=\sinh y$,则 $\lambda=\mu$. 而且 $\lambda'=\mu'=0$,$\lambda''=\mu''=0$,显然,由方程(2.21)可看出,它是方程的一个解,这就启发我们去寻找方程(2.21)的形如

$$y'=A\sinh y \quad (3.5)$$

的解. 其中 A 为待定常数.

这时,　$\lambda=\frac{A\sinh y}{\alpha\cosh y},\quad \mu=\frac{\sinh y}{\alpha\cosh y}.$

为了不重复计算,我们直接求解方程(2.17).

由(2.18)–(2.20)我们有:

$$\sigma_k=\frac{1}{4}\frac{\sinh^k y}{\alpha^k\cosh^k y}(kA+4-k), \quad (3.6)$$

$$\sigma'_k=\frac{k}{4}\frac{\sinh^k y}{\alpha^k\cosh^{k+1} y}(A-1)(kA+4-k), \quad (3.7)$$

$$\sigma''_k=\frac{k}{4}\frac{\sinh^k y}{\alpha^k\cosh^{k+2} y}[-A(A-1)(kA+4-k)\sinh^2 y+k(A-1)^2(kA+4-k)]. \quad (3.8)$$

将(3.6)–(3.8)代入方程(2.17),计算、化简便可得如下命题.

命题 3.1: 方程(2.17)的形如 $y'=A\sinh y$ 的解满足如下方程:

$$(9A^5-21A^4+10A^3+6A^2-3A-1)\sinh^5 y+(9A^4-18A^3+8A^2+2A-1)\sinh^3 y=0 \quad (3.9)$$

由于向量组 $\{\sinh^5 y,\sinh^3 y\}$ 线性无关,因此方程(3.9)等价于方程组

$$\begin{cases}(A-1)^3(3A+1)^2=0\\(A-1)^2(3A+1)(3A-1)=0\end{cases}. \quad (3.10)$$

故方程(2.21)形如 $y'=A\sinh y$ 的解为,$A=1$ 与 $A=-\frac{1}{3}$. 由此,我们得到:

定理 3.1: 欧氏空间 $\mathbf{R}^5$ 中的下列超曲面是 4 阶 Willmore 旋转超曲面:

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(i) $S^n:\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbf{R}^5 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+(x_5-c_0)^2=c^2\}$;

(ii) $U^n:\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\mid$

$$x_5=\frac{3}{2}\left(a_0^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{4}x_i^2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{4}x_i^2}\right)^{\frac{2}{3}}-a_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$a_0\ln\left(\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{4}x_i^2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{4}x_i^2}\right)^{\frac{2}{3}}-a_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)+a\Big\},$$

其中 c_0,c,a_0,a 为常数.

证明: 记 $\alpha(t)(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\alpha\xi_i=x_i,\beta(t)=x_5,\sum\xi_i^2=1(1\leqslant i\leqslant 4)$. 则 $\phi=(\alpha(t)\xi,\beta(t))=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$. 由命题 3.1 知形如 $y'=A\sinh y$ 的解有 $y'=\sinh y$ 和 $y'=-\frac{1}{3}\sinh y$, 我们分别讨论:

情形 1. $y'=\sinh y$. 由(3.3),(3.4)知: $\lambda=\mu=c_1,\phi$ 是全脐的.

又由(3.2)得: $\dfrac{y'}{\alpha\cosh y}=c_1$,

即 $\alpha=c\tanh y, c=\dfrac{1}{c_1}$.

由 $\beta'=\alpha\tanh y=c\tanh^2 y$,

积分得: $\beta=-c\dfrac{1}{\cosh y}+c_0$.

于是 γ 的方程可写为: $\alpha^2+(\beta-c_0)^2=c^2$.

即 $S^n:\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbf{R}^5\mid\sum x_i^2+(x_5-c_0)^2=c^2\}$, 其中 c_0,c_1,c 为常数.

情形 2. $y'=-\dfrac{1}{3}\sinh y$. 积分可以求得:

$$\cosh y=\frac{1+e^{-2a_1-\frac{2t}{3}}}{1-e^{-2a_1-\frac{2t}{3}}}=\frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{3}+a_1\right)}\overset{u=\frac{t}{3}+a_1}{=}\frac{1}{\tanh u}.$$

又 $\tanh y=\dfrac{\sinh y}{\cosh y}=\pm\dfrac{\sqrt{\cosh^2 y-1}}{\cosh y}=\pm\dfrac{1}{\cosh u}$,

由(3.2)的第一式得: $\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}=\tanh u$.

积分得: $\alpha(t)=a_0\cosh^3 u$.

又由(3.2)的第二式得:

$$\beta'(t)=\alpha(t)\tanh y=\pm a_0\cosh^2 u.$$

积分得: $\beta(t)=\pm\dfrac{3}{2}a_0[\cosh u\sinh u+u]+a_2$.

于是,

$$\cosh u=\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\sinh u=\pm(\cosh^2 u-1)^{\frac{1}{2}}=\pm\left(\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$u=\pm\ln\left(\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

因此 γ 的方程可写为:

$$\beta=\frac{3}{2}a_0\left[\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}}+\ln\left(\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\left(\frac{\alpha}{a_0}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]+a_2$$

$$=\frac{3}{2}\left[a_0^{\frac{1}{3}}\alpha^{\frac{1}{3}}\sqrt{\alpha^{\frac{2}{3}}-a_0^{\frac{2}{3}}}+a_0\ln\left(\alpha^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\alpha^{\frac{2}{3}}-a_0^{\frac{2}{3}}}\right)\right]+a'.$$

即 $U^n:\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\mid$

$$x_5=\frac{3}{2}\left[a_0^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{4}x_i^2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{4}x_i^2}\right)^{\frac{2}{3}}-a_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$a_0\ln\left(\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{4}x_i^2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{4}x_i^2}\right)^{\frac{2}{3}}-a_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)+a\Big\},$$

其中 a_0,a_1,a_2,a 为常数.

本文只是得到了欧氏空间 $\mathbf{R}^5$ 中一类特殊的 W_4 - 极小旋转超曲面. 我们发现,欧氏空间维数越高,其高阶 Willmore 旋转超曲面的微分方程越复杂,求解越困难,要得到其全部解是非常困难的. 从定理 3.1 可知,与文献[5]中的结果对比,当 $n=4$ 时,由情形 2 所得到的 W_4 - 极小旋转超曲面只能用超越方程表达,而 $n=3$ 时,[5]中所得到的 W_4 - 极小旋转超曲面都能用代数方程表达. 另外,由方程我们可以看出,欧氏空间 R^5 中还有其他 W_4 - 极小旋转超曲面,这将是后续工作的突破方向.

参 考 文 献

[1] Blaschke W. Vorlesungen uber differentialgeometrie [J]. Springer Berlin, 1929, 3: 121 - 130.

[2] Willmore T J. Note on embedded surfaces [C] // An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect. Ia Mat. 1965: 493 - 496.

[3] Chen B Y. An invariant of conformal mappings [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 40(2): 563 - 564.

[4] Guo Z. Generalized willmore functions and related variation problems [J]. Diff. Geom. Appl., 2007, 25(5): 543 -

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

551.
[5] Guo Z. Higher order Willmore hypersurfaces in Euclidean Space [J]. Acta. Math. Sinica. English Series,2009, 25(25): 77 - 84.
[6] Guo Z, Li H, Wang C P. The second variation formula for Willmore submanifolds in S^n [J]. Results in Math., 2001, 40(1 - 4): 205 - 225.
[7] Li H. Willmore hypersurfaces in a sphere [J]. Asian J. of Math., 2001, 24(2): 365 - 377.
[8] Li H. Willmore submanifolds in a sphere [J]. Mathematics,2002, 9(5 - 6): 771 - 790.

4th Order Willmore Revolution Hypersurfaces in $\mathbf{R}^5$

Li Jianxiang

(School of Mathematics, Baoshan College, Baoshan Yunnan 678000)

Abstract

In this paper, we establish the ordinary differential equation of 4th order revolution Willmore hypersurface in Euclidean space $\mathbf{R}^5$ and give a type of 4th order Willmore revolution hypersurface.

Key words: Conformal invariants, nth order Willmore functional, 4th order Willmore revolution hypersurface.

(上接第 17 页)

[6] Li H, Toda M. Elaboration of Some Results of Srivastava and Choi [J]. Z. A. A., 2006, 25(4): 517 - 533.
[7] Li H. Number Theory and Special Functions [M]. Beijing: Press Beijing, 2011: 23 - 68.
[8] Adamchik V S. Polygamma functions of negative order [J]. J. of Comput. Appl. Math., 1998, 100(2): 191 - 199.
[9] Bendersky L. Sur la fonction gamma ge´ne´ralise´e [J]. Acta Math., 1933, 61: 263 - 322.
[10] Berndt B C. On the Hurwitz zeta-function [J]. Rocky Mount. J of Math., 1972, 2(2): 151 - 158.
[11] Elizalde E. An asymptotic expansion for the first derivative of the generalized Riemann zeta-function [J]. Math. Compute, 1986, 47: 347 - 350.
[12] 李海龙. 关于 n 进制及其有关计数函数 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2002, 18(1): 13 - 15.

The Euler-Maclaurin Summation Formula and It's Application

Yang Qianli　Che Yuhong

(School of Mathematics and Physics, Weinan Normal University, Weinan Shaanxi 714099)

Abstract

Euler-Maclaurin Summation Formula was been researched, the purpose was to promote the application of it. The innovation of method was combination with number theory special function and analytic number theory. Three important results were gotten by the Euler-Maclaurin Summation Formula, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ was expressed by Bernoulli series and Euler-Maclaurin, $\Psi(x)$ and Hurwitz Zeta-function $\zeta(u,a)$ were stated and proved by Bernoulli series and integral of Bernoulli polynomials. It was very important to research the number theory special function.

Key words: Euler-maclaurin summation, hurwitz zeta-function, bernoulli series, logarithmic derivative.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net