DOI:10.19789/j.1004-9398.2017.01.004

挖掘高等数学中的化归思想,培养学员的化归意识*

景慧丽 刘 华 王正元
(火箭军工程大学理学院,陕西 西安 710025)

摘 要

化归是一种非常重要的数学思想和方法,在《高等数学》课程中蕴含着很多化归思想和方法. 在教学过程中,教员要善于挖掘和应用化归,进而培养学员的化归意识和数学素养.

关键词: 高等数学,化归,教学.
中图分类号: G642

在《高等数学》[1,2]课程教学中,笔者经常发现一些学员面对问题时,常常显得一筹莫展,无从下手,久而久之就失去了学习数学的兴趣了. 这种现象产生的根本原因就是学员不会借助于已有知识去解决未知问题,用更专业的词来说就是学员不知道"化归",没有掌握化归思想和方法.

化归就是转化和归结的意思,数学中的化归就是把待解决或未解决的问题,通过转化过程,归结到一类已经解决或者比较容易解决的问题中去,最终求获原问题之解答[3]. 在科学探索中,化归的价值被许多科学家称道,如著名匈牙利数学家路莎·彼得(RozsaPeter)曾指出"数学家们往往不是对问题进行正面的攻击,而是不断地将它变形,直至把它转变成已经能够解决的问题.[3]"其实,在《高等数学》课程中,蕴藏着很多化归思想和方法,在教学过程中,教员要善于挖掘《高等数学》课程中的化归思想,让学员领会并掌握化归思想和方法,进而培养学员的化归意识和能力,提高教学效率,激发学员学习数学的兴趣.

1 《高等数学》课程中蕴含的化归思想和方法

1.1 利用恒等变形把非标准型化归为标准型

这里的标准型是指《高等数学》课程中直接给出的数学定理和数学公式等. 例如不定积分表中的基本公式 $\int\cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$ 就是标准型,要计算 $\int\cos 2x\mathrm{d}x$,就需要通过恒等变形 $\int\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}2x$ 把其化归为标准型,然后再利用基本公式进行计算,其实这种方法在《高等数学》课程中称为第一类换元积分法(也叫凑微分法),第一类换元积分就是典型的化归思想在《高等数学》课程中的体现. 在《高等数学》课程中利用恒等变形把非标准型化归成标准型的思想和方法有很多,例如对洛必达法则来说,$\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式是其标准型,其它非标准型的未定式如 $\infty - \infty$ 型、$0\cdot\infty$ 型、0^0 型、1^∞ 型及 ∞^0 型,都需要先通过恒等变形化归为标准型,再应用洛必达法则. 再如,函数 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是积分上限函数的标准型,且该函数的导数是 $f(x)$,要求 $\int_a^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$、$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$、$\int_a^{h(x)} g(x)f(t)\,\mathrm{d}t$、$\int_a^x f(x-t)\,\mathrm{d}t$ 和 $\int_a^x f(xt)\,\mathrm{d}t$ 等非标准型函数的导数,都需要先利用恒等变形把它们化归为标准型,再利用公式 $\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$.

1.2 利用构造法把未知化归为已知

利用构造法把未知化归为已知,借助于已有知识去获取新知识是《高等数学》课程中最常用的化归思想和方法. 例如,由参数方程所确定的函数的求

收稿日期: 2016-05-05
* 火箭军工程大学 2015 年度教育教学立项课题(项目编号: EPGC2015008)

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

导公式就是把参数方程构造成复合函数,再利用已知的复合函数和反函数的求导法则获得的. 再如,求解多元函数条件极值的拉格朗日乘数法,就是从函数取得极值的必要条件入手,借助隐函数存在定理,把约束条件不能显化的条件极值问题化归为约束条件能显化的问题,再利用已知的代入法,构造辅助函数得到的. 自由项 $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 型的二阶常系数非齐次线性微分方程的特解,就是利用欧拉公式把自由项构造成 $f(x) = P(x)e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P(x)}e^{(\lambda-i\omega)x}$,利用已知的自由项为 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型微分方程的特解公式及解的叠加原理得到的. 还有微分方程中的齐次方程化归为可分离变量的微分方程来求解、伯努利方程化归为一阶线性微分方程来求解等等,都属于通过构造法把未知化归为已知的思想.

1.3　把多元化归为一元、把高维化归为一维

把多元化归为一元、把高维化归为一维这种思想方法主要体现在多元函数微积分学中. 例如,偏导数的实质是一元函数求导,所以求偏导数就化归为求一元函数的导数; 二重积分化归为二次积分(即实质是两个定积分)来求解; 三重积分化归为三次积分(即实质是三个定积分)来求解; 曲线积分化归为定积分来求解; 曲面积分化归为二重积分来求解; 三类可降阶的高阶微分方程通过变量代换化归为一阶微分方程来求解等等.

2　利用《高等数学》课程教学培养学员化归意识的方法

2.1　在课堂教学中灌输化归思想,帮助学员“认识”化归

大部分学员对《高等数学》课程的学习主要定位为掌握概念、定理,会解题,考试能过关即可,几乎没有学员主动去理解、掌握数学思想方法. 因此,要利用《高等数学》课程教学来培养学员的化归意识,就需要教员在课堂教学中向学员不断地灌输化归思想,明确告诉学员这种获取知识的方法就是化归,这样就可以使学员潜移默化地认识化归,进而主动地养成化归意识. 例如,讲完积分上限函数 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的导数后,笔者就告诉学员: 这种利用导数的定义来研究这个特殊函数的可导性问题,其实所应用的研究方法就是化归,注意到积分上限函数是一种新的函数类型,所以要研究其性质,就必须从函数可导的这个一般概念入手. 经过教员这种直截了当的讲解,学员不但加深了对知识点的理解,而且感受到了化归的重要价值,理解了化归方法,更重要的是培养了学员的化归意识.

2.2　在课堂教学中教给学员常用的化归方法,帮助学员“学会”化归

在课堂教学中灌输化归思想是培养学员化归意识的首要步骤,教给学员常用的化归方法是培养学员化归意识的基本策略. 在课堂教学中,教员可以在讲授知识的过程中,明确告诉学员是如何化归的. 例如,在讲解空间曲面的法向量的求法时,笔者讲完方程为 $F(x,y,z) = 0$ 的曲面的法向量的求法后,提出问题: 如何求曲面 $z = f(x,y)$ 的法向量?此时笔者这样告诉学员: 只要把方程 $z = f(x,y)$ 转化成 $F(x,y,z) = 0$ 这种类型,那么就可以借助于已知的方程为 $F(x,y,z) = 0$ 的曲面的法向量公式,来求未知的方程为 $z = f(x,y)$ 的曲面的法向量,显然只要把方程 $z = f(x,y)$ 变形成 $f(x,y) - z = 0$ 即可. 讲完这些之后,笔者就明确告诉学员,这种方法其实就是借助于已知来求未知的化归思想,而且这种化归方法可以理解为把非标准型化归为标准型,也可以理解为把特殊化归为一般. 经过这样讲解,学员不但掌握了知识,体会到了化归的重要价值,更重要的是学会了如何化归、怎么化归、遇到问题如何入手分析等基本能力. 其实,教员可以在课堂教学中教给学员最基本的化归方法,即告诉学员遇到问题时,首先考虑“这是什么类型的问题? 它与某个已知的问题有关吗? 它像某个已知问题吗?”然后从所要追求的具体目标(未知元素、待证命题)出发进行考虑“这里的关键是什么? 有一个同样类型的问题(特别是过去接触过的问题)吗? 有一个具同样结论的定理(特别是过去证过的定理)吗?[3]”. 如果教员经常给学员灌输这种思想和方法,学员又很乐意接受,那么学员就会不自觉地培养起化归意识和能力.

2.3　应用问题教学法,引导学员“应用”化归

利用问题教学,让学员自己探索知识的形成过程,引导学员应用化归,是培养学员化归意识的一种重要途径. 在《高等数学》课程教学中,教员可以把知识重点、要点设计成一系列问题,让学员通过自己解决问题来获取知识,学员在解决问题过程中,就会把问题转变成已知知识,这实际就应用了化归. 例如,对空间曲线的切线这部分内容,重点和核心就是求曲线的切线. 因此,笔者就把这部分内容设计成了一系列问题: 曲线的切线是如何定义的? 割线 M_0M

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

的方程是什么?如何定量描述割线 M_0M 的极限位置?如何求曲线 $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线?你会求哪类曲线的切线?曲线 $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$ 能化成参数式方程吗?怎么化?如何求曲线 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线呢?这类曲线方程又可以怎么转化呢?如何求 $\frac{dy}{dx}$、$\frac{dz}{dx}$ 呢?求 $\frac{dy}{dx}$、$\frac{dz}{dx}$ 的问题又相当于什么问题呢?等等. 学员要解决这些问题,都必须把这些问题转化成已经解决过的问题. 例如求 $\frac{dy}{dx}$、$\frac{dz}{dx}$ 的问题,其实就是把问题转化为:求方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 所确定的两个一元函数 $y = y(x)$、$z = z(x)$ 的导数,利用已知知识"隐函数组存在定理"即可解决. 其实在《高等数学》课程中,很多内容都可以采用这种问题教学法,通过问题教学法不但可以培养学员的化归意识和能力,还可以培养学员的问题意识和创新思维能力.

当然,利用《高等数学》课程教学来培养学员的化归意识还有很多途径和方法,还需要进一步探索和实践. 值得注意的是,化归毕竟是一种间接解决问题的思想方法,化归过程不可能无限制地进行下去,它的应用必须以某种"原始"的发现为前提[3]. 因此,要想应用好化归,就必须积累一定的知识,要清楚明白各知识点之间的联系,这就要求教员注重基础知识的教学,鼓励学员归纳所学知识,主动构建自己的知识结构. 另外,需要强调的是,并不是所有的问题都可以通过化归就能解决的,"化不归"的情形在数学探索中常常会不期而遇[3],因此千万不能夸大化归的价值.

参 考 文 献

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学(上)(第七版)[M]. 北京:高等教育出版社,2014.

[2] 同济大学应用数学系. 高等数学(下)(第七版)[M]. 北京:高等教育出版社,2014.

[3] 熊惠民. 数学思想方法通论[M]. 北京:科学出版社,2010:13 - 17.

Discover the Transformation Thought in Higher Mathematics and Cultivation of Students´ Transformation Consciousness

Jing Huili Liu Hua Wang Zhengyuan

(School of Natural Science, The Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi 710025)

Abstract

Transformation is an important mathematic thought and method. There are many kinds of transformation thought and method in the higher mathematics. In the process of teaching, teacher discovery and apply the transformation, and stimulate the students´ transformation consciousness and mathematical literacy.

Key words: higher mathematics, transformation, teaching.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net