DOI：10.19789/j.1004-9398.2023.02.004
文献引用：石沛，卢迎，王笑涵，等．磁场控制幺正多体动力学中的纠缠扩散[J]．首都师范大学学报（自然科学版），2023，44(2)：15-21. SHI P，LU Y，WANG X H，et al. Controlling entanglement spreading in unitary many-body dynamics by magnetic pulses [J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition)，2023，44(2)：15-21.

磁场控制幺正多体动力学中的纠缠扩散*

石　沛**，卢　迎**，王笑涵，胡　洁***，冉仕举***
（首都师范大学物理系，北京　100048）

摘要：研究在量子多体系统的动力学过程中纠缠的传播，是非平衡态物理中的重要问题。本文通过优化磁场来极大化纠缠熵，研究其对量子态纠缠传播性质的影响。在具有最近邻耦合的量子伊辛链上，通过施加变分优化所得的磁场来极大化末态的纠缠熵，并提高弹道输运区间的纠缠增长速度，同时，也可以使短链的纠缠熵达到固定磁场下长链的纠缠饱和值大小。当增加链长时，纠缠熵的饱和值增大，但是增长速度几乎不变。特别地，也可以通过控制磁场，使得只具有最近邻相互作用的海森堡反铁磁链的纠缠增长速度被提高到与具有长程相互作用系统纠缠增长速度相同。本文的研究揭示了磁场在非平衡过程中控制纠缠传播的能力，在未来可应用于量子控制和信息处理。

关键词：纠缠熵；量子调控；机器学习；时间演化
中图分类号：O411　　**文献标识码**：A

Controlling entanglement spreading in unitary many-body dynamics by magnetic pulses*

SHI Pei**，LU Ying**，WANG Xiaohan，HU Jie***，RAN Shiju***
（Department of Physics，Capital Normal University，Beijing　100048）

Abstract：The study of entanglement propagation in the dynamics of quantum multibody systems is an important problem in non-equilibrium physics. This paper optimizes the magnetic field to maximize the entanglement entropy and studies its influence on the entanglement propagation properties of quantum states. On the quantum Ising chain with the nearest neighbor coupling，the magnetic field obtained by variational optimization is applied to maximize the entanglement entropy of the final state and improve the entanglement growth rate in the ballistic transport region. At the same time，the entanglement entropy of the short chain can reach the entanglement saturation value of the long chain under a fixed magnetic field. When the chain length is increased，the saturation value of entanglement entropy increases，but the growth rate is almost the same. Specifically，by controlling the magnetic field，the entanglement growth rate of Heisenberg antiferromagnetic chain with only the nearest neighbor interaction can be increased to the same rate as that of the system with long-range interaction. The research in this paper reveals the ability of magnetic field to control entanglement propagation in

收稿日期：2022-03-23
* 国家自然科学基金项目（62175169）
** 共同第一作者
*** 通信作者：jie.hu@cnu.edu.cn；sjran@cnu.edu.cn

non-equilibrium process, which can be applied to quantum control and information processing in the future.

Keywords: entanglement entropy; quantum control; machine learning; time evolution
CLC: O411 **DC**: A

0 引 言

研究纠缠在量子多体系统动力学过程中的传播,是揭示强关联体系现象和性质的关键,如准粒子激发[1-2]、信息传播[3-6]、多体定域[7-14]和因果关系[15]等。纠缠的扩散,如扩散的速度,通常由相互作用决定[15-17]。对于可积的一维模型,由于准粒子的弹道传播,纠缠通常以弹道方式传播[1,18-19],也可能发生在不可积的扩散系统中[20]。对于具有一定随机性或无序性的模型,纠缠会随时间呈现对数增长[7-11,21-22]。

保持和增强系统的量子纠缠是另一个重要的问题[23-24]。这主要是因为纠缠在量子信息处理和量子计算中十分脆弱,存在着不可避免的噪声。有研究者提出利用量子控制技术,产生各种纠缠态[25-26]。最近,利用机器学习的方法,在量子传输和控制的研究中开辟了一条新的途径[27-35]。这些成果体现了机器学习在控制纠缠传播方面的潜在应用,然而这一点还没有被充分探索。

本文通过设计磁场来控制量子自旋链的纠缠增长,使用精细化时间优化算法(fine-grained time optimization, FGTO)[36],通过极大化演化态的纠缠熵来优化磁场。在具有最近邻耦合的量子伊辛链上,通过优化磁场来极大化末态的纠缠熵,同时,通过磁场改善系统的弹道传输,提高纠缠的饱和度。此外,通过控制磁场,较小系统的纠缠可以达到较大系统的纠缠上限。对于海森堡反铁磁链,显示优化的磁场可以增大系统的纠缠;同时,也可将纠缠增长的速度提高到与零磁场下具有长程相互作用的系统纠缠增长的速度相同。

1 纠缠控制的优化

考虑N个自旋的自旋链随时间演化的哈密顿量为

$$\hat{H}(t)=\sum_{m<n}\sum_{\alpha=x,y,z}J_{mn}^{\alpha}\hat{S}_{m}^{\alpha}\hat{S}_{n}^{\alpha}+\sum_{n}\sum_{\alpha=x,y,z}h_{n}^{\alpha}(t)\hat{S}_{n}^{\alpha},\quad(1)$$

式中:$\hat{S}_{n}^{\alpha}$是第n个位置上α方向的自旋算符;$h_{n}^{\alpha}(t)$是t时刻α方向的磁场;J_{mn}^{α}是耦合常数,本文假设其与时间无关。

本文的目标是获得最佳$h_{n}^{\alpha}(t)$,使在$t=T$(取约化普朗克常数为1,计算过程中的物理量都取自然单位制)时刻演化态$|\Psi(T)\rangle=\hat{U}(T)|\Psi_{0}\rangle$的纠缠极大化。这里,$\hat{U}(T)$是由$\hat{H}(T)$确定的时间演化算符,$|\Psi_{0}\rangle=|\Psi(t=0)\rangle$是初态。

将自旋链分为前r个自旋和后$N-r$个自旋,对在t时刻的演化态$|\Psi(t)\rangle$进行施密特分解

$$|\Psi(t)\rangle=\sum_{\beta=1}^{\chi}\Lambda_{\beta}^{r}|U_{\beta}^{1;r}\rangle|V_{\beta}^{r+1;N}\rangle,\quad(2)$$

式中:χ是施密特秩;Λ_{β}^{r}是纠缠谱;$|U_{\beta}^{1;r}\rangle$和$|V_{\beta}^{r+1;N}\rangle$是施密特基。考虑极大化链中间($r=N/2$)的二分纠缠熵$S_{\mathrm{mid}}$,满足

$$S_{\mathrm{mid}}=-\sum_{\beta}(\Lambda_{\beta}^{N/2})^{2}\log_{2}(\Lambda_{\beta}^{N/2})^{2}。\quad(3)$$

选择负纠缠熵作为损失函数

$$L=-S_{\mathrm{mid}}。\quad(4)$$

为了极小化损失函数(L),利用梯度下降算法来更新磁场

$$h_{n}^{\alpha}(t)\leftarrow h_{n}^{\alpha}(t)-\eta\frac{\partial L}{\partial h_{n}^{\alpha}(t)},\quad(5)$$

式中η表示梯度步长或者学习率。使用在机器学习领域中强大的优化器——Adam来动态控制η[37],通过自动微分技术计算梯度$\frac{\partial L}{\partial h_{n}^{\alpha}(t)}$。考虑到实验中时,也可以选择其他形式的纠缠来测量$|\psi(T)\rangle$的纠缠[38],并根据测量数据计算梯度。

然而,现有的研究表明,在优化过程中可能会出现许多局部极小值,如当使用时间切片优化(sliced time optimization, STO)时,显示重复计算16次结果的方差很大,效果也最差,说明采用这种优化方法时很有可能掉入了不同的局域极小值内[36]。所以,优化的结果对$h_{n}^{\alpha}(t)$的初始值很敏感。因此,本文使用FGTO方法来优化磁场[36]。具体来说,将总时间(T)离散化为K个相同的时间切片,演化态可以近似为

$$|\Psi(T)\rangle\simeq\prod_{k=K}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau\hat{H}(k\tau)}|\Psi_{0}\rangle,\quad(6)$$

式中$\tau=\frac{T}{K}$为时间切片。在$(k-1)\tau\leqslant t\leqslant k\tau$时间

内,假设 $h_n^\alpha(t)$ 不变,取值为 $h_n^\alpha(t)=h_{n,k}^\alpha$。变分磁场被离散为方波脉冲(Trotter-Suzuki 形式[39-40]),这种控制方法可以认为是 bang-bang protocols 的推广[41-42]。在每一个时间切片中,进一步将每一步分解为 $e^{-i\tau\hat{H}(k\tau)}\simeq(\sum_{k'=1}^{N'}e^{-i\tilde{\tau}\hat{H}(k\tau)})e^{-i\tau'\hat{H}(k\tau)}$,其中 $\tilde{\tau}N'+\tau'=\tau$(本文固定 $\tilde{\tau}=0.1$,$\tau'\in(0,0.1)$)。在这里,Trotter-Suzuki 分解带来的误差为 $O(\tilde{\tau}^2)$。

为了体现结果的一般性,把初始态设置为乘积态 $|\Psi_0\rangle=\prod_{\otimes n=1}^{N}|s_n\rangle$,其中 $|s_n\rangle$ 指向布洛赫球面上的随机方向

$$|s_n\rangle=\cos(\frac{\theta_n}{2})|0_n\rangle+e^{i\phi_n}\sin(\frac{\theta_n}{2})|1_n\rangle,\qquad(7)$$

式中:角度为 $\theta_n\in[0,\pi)$,$\phi_n\in[0,2\pi)$。态 $|0_n\rangle$ 和态 $|1_n\rangle$ 是 $\hat{S}_n^z$ 的 2 个本征态。显然,初始态并不是哈密顿量随时间演化的本征态。

FGTO 流程如图 1 所示。FGTO 的思想是逐渐细化时间的离散化,用 κ 指标来记录逐渐细化的过程。FGTO 更新磁场示意如图 2 所示。从 $\kappa=0$(对应 $K=2^\kappa=1$)的时间切片开始,$h_{n,1}^\alpha(\kappa=0)$ 在整个演化过程中保持为常数,磁场的初始值是随机取的。利用式(5)进行足够多次的梯度优化,从而达到 $h_{n,1}^\alpha(\kappa=0)$ 的最佳值,即为 $\tilde{h}_{n,1}^\alpha(\kappa=0)$。下一步,$\kappa=1$(对应 $K=2^\kappa=2$),此时初始化磁场的强度由 $\kappa=0$ 优化后的磁场来初始化,即 $h_{n,k=1,2}^\alpha(\kappa=1)=\tilde{h}_{n,k=1}^\alpha(\kappa=0)$,再次利用式(5)进行足够多次的梯度优化,从而达到 $h_{n,k=1,2}^\alpha(\kappa=1)$ 的最佳值,即为 $\tilde{h}_{n,k=1,2}^\alpha(\kappa=1)$,作为 $\kappa=2$(对应 $K=2^\kappa=4$)的磁场初始值。也就是说,对于 $\kappa>1$(对应 $K=2^\kappa$),根据第 $\kappa-1$ 次优化后获得的磁场强度来初始化第 κ 次磁场的强度,即 $h_{n,2\tilde{k}-1}^\alpha(\kappa)=h_{n,2\tilde{k}}^\alpha(\kappa)=\tilde{h}_{n,\tilde{k}}^\alpha(\kappa-1)$,式中 $\tilde{k}=1,2,\cdots,2^{\kappa-1}$。利用式(5)进行足够多次的梯度优化,从而达到 $h_{n,k}^\alpha(\kappa)$ 收敛。通过依次将 K 增加到 $2K$ 来逐渐细化时间的离散化,每次细化后时间切片的数目为 2^κ,设置切片数目的上限为 $\tilde{K}$,最终得到优化好的磁场 $\tilde{h}_{n,k}^\alpha$。

2　控制纠缠的扩散

考虑量子伊辛链和海森堡反铁磁链作为 2 个例子。第 m 和 n 个自旋之间的耦合强度(J_{mn}^α)的代数衰减为

$$J_{mn}^\alpha=\frac{J^\alpha}{|m-n|^\gamma},\qquad(8)$$

式中 γ 表示衰减率。对于海森堡反铁磁链,令 $J^\alpha=1$;而对于量子伊辛链,令 $J^z=1$ 和 $J^x=J^y=0$。特别地,对于最近邻的情况(即 $\gamma=\infty$),当 $m+1=n$ 时,令 $J_{mn}^\alpha=1$,其他 $J_{mn}^\alpha=0$。本文利用 FGTO 方法优化哈密顿量中的磁场项,精确地模拟了 Trotter-Suzuki 形式的时间演化,即式(6)。

量子伊辛链的纠缠熵(S_{mid})与时间(t)的关系如图 3 所示。2 个不同的总演化时间(T)下,固定自旋总数为 $N=10$ 的 S_{mid} 纠缠增长,即 $T=10$ 和 $T=60$。在 $T=10$ 时,取时间切片总数 $\tilde{K}=16$;在 $T=60$ 时,取 $\tilde{K}=64$。对于不加磁场(即 $h_n^\alpha(t)=0$)的量子伊辛链,演化态 $|\psi(t)\rangle$ 的 S_{mid} 随 t 振荡。这是因为该系统是经典的,其中哈密顿量中的所有项可以相互交换。利用 FGTO 方法极小化末态(即 $t=T$)的负纠缠熵(L),S_{mid} 在 $t<5$ 时在优化 $h_n^\alpha(t)$ 的作用下线性增加。为了进行比较,本文还展示了与时间无关的横向和纵向固定磁场[20]($h_n^x(t)=(\sqrt{5}+5)/8$,$h_{n\neq1,N}^z(t)=(\sqrt{5}+1)/8$ 和 $h_{n=1,N}^z(t)=(\sqrt{5}-3)/4$)

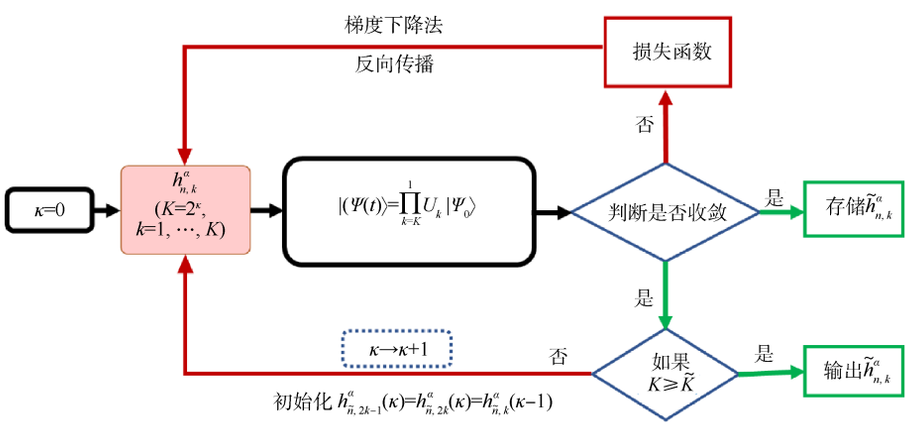


图 1　精细化时间优化算法(FGTO)流程[36]

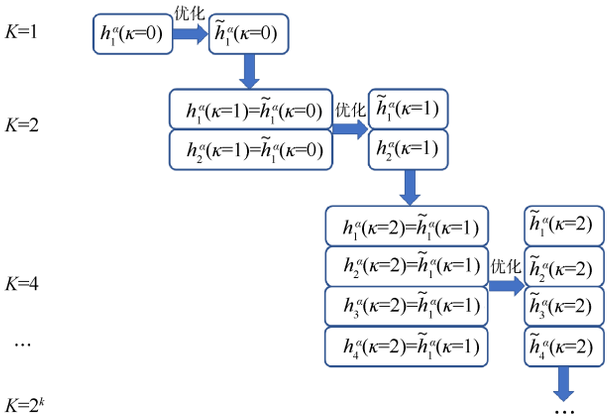


图2　FGTO更新磁场示意

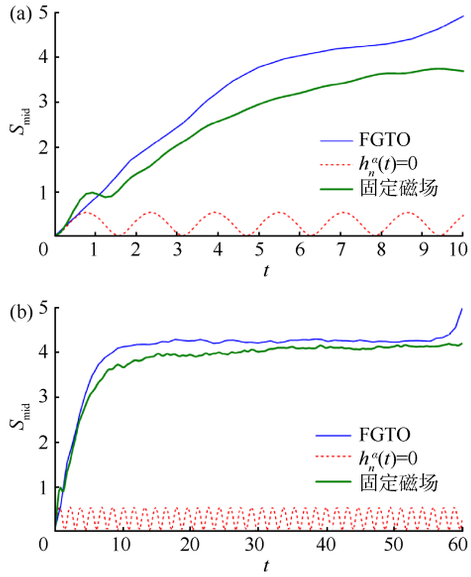


图3　量子伊辛链的纠缠熵(S_{mid})与时间(t)的关系

(a) $T=10, \tilde{K}=16$; (b) $T=60, \tilde{K}=64$

的S_{mid}结果。研究表明,在有限尺寸的纠缠熵饱和开始之前,S_{mid}都随t线性增加,并且在弹道输运区间,优化的磁场比固定磁场纠缠增加得快。当接近T时,量子伊辛链的S_{mid}数值有一段上翘,这可能是因为选择在$t=T$时极大化末态的S_{mid}。在$T=10$和60时,清晰地观察到相同的现象,这结果反映出利用磁场改变纠缠增长能力的稳定性。在$t=T$时,S_{mid}增长达到饱和。另外,观察到图3(b)中$S_{\mathrm{mid}}(t=60)$近似等于图3(a)中$S_{\mathrm{mid}}(t=10)$,这表明系统S_{mid}的饱和度不随T改变。

量子伊辛链下FGTO算法优化得到的磁场如图4所示。固定$N=10$,$T=10$,$\tilde{K}=16$。纵坐标t为演化时间$t=k\tau$,横坐标n为链中自旋的位置,也就是说,第n列和第k行块的颜色表示在第k时间片内第n个自旋的磁场强度。根据图4,通过施加磁场,可以将初始态演化到图3(a)带圆点的实线结果。

量子伊辛链在不同长度自旋链的S_{mid}与t的关系如图5所示。通过在$T=20$时极小化末态的L来优化磁场,固定$\tilde{K}=32$。可知,不管是优化磁场还是固定磁场的情形,自旋链的N不同都对S_{mid}增长产生影响。另外,可以看到系统纠缠的饱和度与系统的大小有关,链长越长,系统纠缠的饱和度越高。通过极小化末态的L,增大了系统纠缠的饱和值,同时提高了弹道输运区间的增长速度。采用优化$h_n^{\alpha}(t)$演化链长为$N=10$自旋链得到的S_{mid},可以达到固定磁场演化链长为$N=12$自旋链得到的饱和

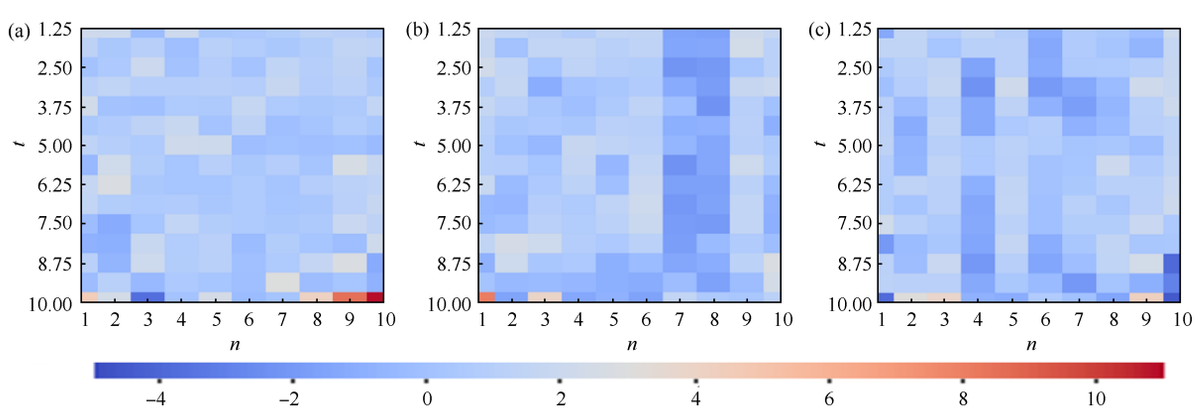


图4　量子伊辛链下FGTO算法优化得到的磁场

(a) h_x; (b) h_y; (c) h_z

注:h_x、h_y和h_z分别表示x、y和z方向的磁场。

纠缠;同样,采用优化 $h_n^{\alpha}(t)$ 得到链长为 $N=12$ 自旋链的 S_{mid},可以达到固定磁场下链长为 $N=14$ 自旋链的饱和纠缠。因此,通过控制 $h_n^{\alpha}(t)$,较小系统的纠缠可以达到较大系统的饱和纠缠。

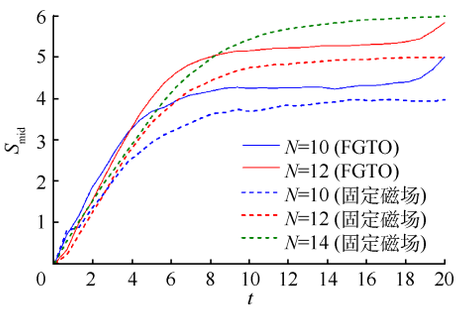
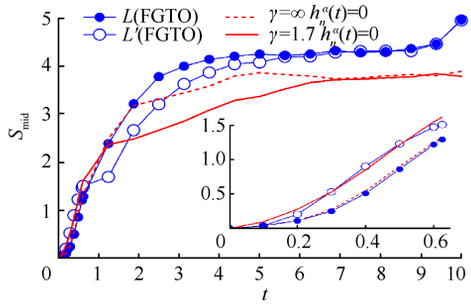


图5　量子伊辛链在不同长度自旋链的 S_{mid} 与 t 的关系

通过对损失函数的设计,实现对系统纠缠的特定控制。将 $t=T$ 处的负纠缠熵作为损失函数 L,主要涉及最终态 $|\psi(T)\rangle$ 的纠缠。为了加速演化早期的纠缠增长,可以将 L 构造为几个早期时间点的 S_{mid} 的总和,满足

$$L'=-\sum\nolimits_m S_{\mathrm{mid}}(t_m)。\tag{8}$$

最近邻海森堡反铁磁链的 S_{mid} 与 t 的关系如图6所示。取 $t_m=\{0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,T\}$ 来构造 L,其目的不仅是为了获得最终状态的最大纠缠,而且可以在早期使纠缠快速增长。以 $N=10$,$T=10$,$\tilde{K}=16$ 海森堡反铁磁链为例。本文利用FGTO算法,选取2种不同的 L 和 L' 来优化只含有最近邻相互作用($\gamma=\infty$)哈密顿量的磁场项,观察纠缠增长的不同情况,并与零磁场(即 $h_n^{\alpha}(t)=0$)下具有最近邻相互作用($\gamma=\infty$)以及具有长程相互作用($\gamma\simeq1.7$)的这2种纠缠增长情况作对比。由插图可知,对于 $t\leqslant0.6$,通过极小化 L',最近邻相互作用的 S_{mid} ($\gamma=\infty$)与零磁场下具有长程相互作用($\gamma\simeq1.7$)的 S_{mid} 增长一样快,而且比零磁场具有最近邻相互作用($\gamma=\infty$)以及通过极小化末态的 L 来优化的磁场下最近邻相互作用的 S_{mid} 增长速度快。此外,通过极小化 L' 而不是 L,也出现接近 $t=T$ 的 S_{mid} 的数值上翘,这是由于 L' 中含有末态 $|\psi(T)\rangle$ 的 S_{mid} 的结果。如果通过极小化 L 来优化 $h_n^{\alpha}(t)$,与零磁场相比,在 $t\leqslant0.6$ 不会增加纠缠增长的速度,在 $t\to T$ 附近也观察到 S_{mid} 明显上升,这与本文对量子伊辛链的讨论一致。



注:插图表示 $t\leqslant0.6$ 的情况。

图6　最近邻海森堡反铁磁链的 S_{mid} 与 t 的关系

3　结束语

本文研究了在变分磁场作用下量子动力学过程中纠缠的传播。对于量子伊辛链,通过极大化末态的 S_{mid} 来优化磁场,改善了弹道输运,同时增大了系统的饱和纠缠。通过优化磁场,显示较小系统纠缠可以达到与固定磁场下较大系统的纠缠上限。对于海森堡反铁磁链,具有最近邻耦合的纠缠增长速度,可以被提高到与零磁场下具有长程相互作用的纠缠增长速度相同的水平。本文的工作为研究纠缠动力学和一般的非平衡物理提供了一个不同的量子控制的视角,揭示了单体算符可以用于控制量子多体系统在时间演化中的性质变化。

参 考 文 献

[1] CALABRESE P, CARDY J. Evolution of entanglement entropy in one-dimensional systems [J]. Journal of Statistical Mechanics, 2005, 4(4): 04010.

[2] BASTIANELLO A, COLLURA M. Entanglement spreading and quasiparticle picture beyond the pair structure[J]. SciPost Physics, 2020, 8(3): 045.

[3] JURCEVIC P, LANYON B P, HAUKE P, et al. Quasiparticle engineering and entanglement propagation in a quantum many-body system[J]. Nature, 2014, 511(7508): 202-205.

[4] CLARK J B, GLASSER R T, GLORIEUX Q, et al. Quantum mutual information of an entangled state propagating through a fast-light medium [J]. Nature Photonics, 2014, 8(7): 515-519.

[5] LUITZ D J, BAR LEV Y. Information propagation in isolated quantum systems[J]. Physical Review B, 2017, 96(2): 020406.

[6] ZHU W, HUANG Z S, HE Y C, et al. Entanglement hamiltonian of many-body dynamics in strongly correlated systems[J]. Physical Review Letters, 2020,

124(10):100605.
[7] ŽNIDARIČ M, PROSEN T, PRELOVŠEK P. Many-body localization in the Heisenberg XXZ magnet in a random field[J]. Physical Review B,2008,77(6):064426.
[8] BARDARSON J H, POLLMANN F, MOORE J E. Unbounded growth of entanglement in models of many-body localization[J]. Physical Review Letters,2012,109(1):017202.
[9] SERBYN M, PAPIĆ Z, ABANIN D A. Universal slow growth of entanglement in interacting strongly disordered systems[J]. Physical Review Letters, 2013, 110(26):260601.
[10] VOSK R, ALTMAN E. Many-body localization in one dimension as a dynamical renormalization group fixed point[J]. Physical Review Letters, 2013, 110(6):067204.
[11] HUSE D A, NANDKISHORE R, OGANESYAN V. Phenomenology of fully many-body-localized systems[J]. Physical Review B,2014,90(17):174202.
[12] ŽNIDARIČ M. Entanglement in a dephasing model and many-body localization[J]. Physical Review B,2018,97(21):214202.
[13] SCHULZ M, HOOLEY C A, MOESSNER R, et al. Stark many-body localization[J]. Physical Review Letters,2019,122(4):040606.
[14] TOMASI D G. Algebraic many-body localization and its implications on information propagation[J]. Physical Review B,2019,99(5):054204.
[15] SCHNEIDER J T, DESPRES J, THOMSON S J, et al. Spreading of correlations and entanglement in the long-range transverse Ising chain[J]. Physical Review Research,2021,3(1):L012022.
[16] LIEB E H, ROBINSON D W. The finite group velocity of quantum spin systems[J]. Communications in Mathematical Physics,1972,28:251-257.
[17] SCHACHENMAYER J, LANYON B P, ROOS C F, et al. Entanglement growth in quench dynamics with variable range interactions[J]. Physical Review X, 2013,3(3):031015.
[18] CHIARA G D, MONTANGERO S, CALABRESE P, et al. Entanglement entropy dynamics of Heisenberg chains[J]. Journal of Statistical Mechanics (Theory and Experiment),2006(3):P03001.
[19] HARTMAN T, MALDACENA J. Time evolution of entanglement entropy from black hole interiors[J]. Journal of High Energy Physics,2013(5):14.
[20] KIM H, HUSE D A. Ballistic spreading of entanglement in a diffusive nonintegrable system[J]. Physical Review Letters,2013,111(12):127205.
[21] BURRELL C K, OSBORNE T J. Bounds on the speed of information propagation in disordered quantum spin chains[J]. Physical Review Letters,2007,99(16):167201.
[22] IGLÓI F, SZATMÁRI Z, LIN Y C. Entanglement entropy dynamics of disordered quantum spin chains[J]. Physical Review B,2012,85(9):094417.
[23] ALBARELLI F, SHACKERLEY-BENNETT U, SERAFINI A. Locally optimal control of continuous-variable entanglement[J]. Physical Review A, 2018, 98(6):062312.
[24] LUBASCH M,MINTERT F,WIMBERGER S. Dynamical enhancement of spatial entanglement in massive particles[J]. Physical Review A,2011,84(6):063615.
[25] HAI K, HAI W H, CHEN Q. Controlling transport and entanglement of two particles in a bipartite lattice[J]. Physical Review A,2010,82(5):053412.
[26] ZHENG Y, YANG S J. Controlling correlated particles and generating entanglement in an ac-driving lattice[J]. The European Physical Journal Special Topics,2017,226(12):2843-2851.
[27] PALITTAPONGARNPIM P, WITTEK P, ZAHEDINEJAD E, et al. Learning in quantum control: high-dimensional global optimization for noisy quantum dynamics[J]. Neurocomputing,2017,268:116-126.
[28] YANG X C, YUNG M H, WANG X. Neural-network designed pulse sequences for robust control of singlet-triplet qubits[J]. Physical Review A, 2018, 97(4):042324.
[29] BUKOV M, DAY A, SELS D, et al. Reinforcement learning in different phases of quantum control[J]. Physical Review X,2018,8(3):031086.
[30] WU R B, DING H J, DONG D Y, et al. Learning robust and high-precision quantum controls[J]. Physical Review A,2019,99(4):042327.
[31] ZHANG X M, WEI Z Z, ASAD R, et al. When does reinforcement learning stand out in quantum control? A comparative study on state preparation[J]. Quantum Information,2019,5(1):85.
[32] NIU M Y, BOIXO S, SMELYANSKIY V N, et al. Universal quantum control through deep reinforcement learning[J]. Quantum Information,2019,5(1):33.
[33] SCHAFER F, KLOC M, BRUDER C, et al. A differentiable programming method for quantum control[J]. Machine Learning Science and Technology,2020,1(3):035009.
[34] ZENG Y X, SHEN J, HOU S C, et al. Quantum control based on machine learning in an open quantum system

[J]. Physics Letters A,2020,384(35):126886.

[35] HUANG T Y, BAN Y, SHERMAN E Y, et al. Machine-learning-assisted quantum control in a random environment[J]. Physical Review Applied,2022,17(2):024040.

[36] LU Y, LI Y M, ZHOU P F, et al. Preparation of many-body ground states by time evolution with variational microscopic magnetic fields and incomplete interactions [J]. Physical Review A,2021,104(5):052413.

[37] KINGMA D P, BA J. Adam: a method for stochastic optimization [C]//ANON. International Conference on Learning Representations. San Diego: ICLR 2015-Conference Track Proceedings,2015:1-15.

[38] GÜHNE O, REIMPELL M, WERNER R F. Estimating entanglement measures in experiments [J]. Physical Review Letters,2007,98(11):110502.

[39] SUZUKI M, INOUE M. The ST-transformation approach to analytic solutions of quantum systems I: general formulations and basic limit theorems [J]. Progress of Theoretical Physics,1987,78(4):787-799.

[40] INOUE M, SUZUKI M. The ST-transformation approach to analytic solutions of quantum systems II: transfer-matrix and Pfaffian methods [J]. Progress of Theoretical Physics,1988,79(3):645-664.

[41] COHN J, SAFAVI-NAINI A, LEWIS-SWAN R J, et al. Bang-bang shortcut to adiabaticity in the Dicke model as realized in a Penning trap experiment[J]. New Journal of Physics,2018,20(5):055013.

[42] BALASUBRAMANIAN S, HAN S Y, YOSHIMURA B T, et al. Bang-bang shortcut to adiabaticity in trapped-ion quantum simulators[J]. Physical Review A,2018,97(2):022313.

(责任编辑:兰丽丽)