DOI:10.19789/j.1004-9398.2017.01.002

图的点可区别边色数的一个上界*

崔俊峰
(陇南师范高等专科学校数信学院,甘肃 成县 742500)

摘 要

本文借助于Lova´sz局部引理,应用概率方法研究了图的点可区别边色数的上界.

关键词: Lova´sz引理,概率方法,点可区别边染色,上界.
中图分类号: O212

1 引 言

图染色是图论研究的主要方向之一,它不仅具有很强的实际应用背景,而且具有重要的理论意义.众所周知,图染色产生于著名的"四色猜想",随后拓展到全染色、可区别染色以及邻和染色. 1996年,Favaron O, Li H, Schelp R H首先引入了点可区别边染色(即强边染色)的概念,随后得到了图论工作者广泛关注. 2008年,张忠辅等提出了点可区别边染色的概念及相关猜想. 事实上,图的点可区别均匀边染色就是一个满足两个色类基数之差不超过1的点可区别边染色. 在图的染色方面,概率方法可以用来证明目标组合对象的存在性,并且不必要明确地将它们构造出来,而Lova´sz引理经常用于目标存在性的证明,需要在我们的研究对象上构造一个概率空间,并使得我们要证明性质的出现是这个概率空间中的一个事件,然后证明该事件发生的概率大于0即可.

张东翰、张忠辅[1]讨论了图的邻点强可区别全色数的上界,田京京[2]分别用Lova´sz局部引理的最简单形式和一般形式证明了图的邻点可区别全染色的色数上界,陆尚辉[3]讨论了用Lova´sz局部引理的一般形式证明图的邻点强可区别全染色的色数上界,本文主要利用Lova´sz局部引理讨论n阶最大度为d的图点可区别边染色的上界.

定义1.1[4] 令$A_1, A_2, \cdots, A_n$为概率空间的n个事件,对事件的集合S,T是S中一些事件(或事件的补)构成的任一子集,如果满足$P_r(A_i \mid \bigcap_{A_j \in T} A_j) = P_r(A_i)$,则称$A_i$与事件的集合$S$互相独立;以$V(H) = \{1,2,\cdots,n\}$为顶点的有向图$H = (V(H), E(H))$被称作相关图$\Leftrightarrow$如果对所有$\{A_i: 1 \leqslant i \leqslant n\}$,$A_i$与集合$\{A_j: (ij) \notin E(H)\}$中的事件互相独立.

定理1.1 (Lova´sz局部引理的非对称局部引理)[4] 考虑(典型的坏的)事件的集合$\varepsilon = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$,对每一个$A_i$,都存在$D_i$($D_i$可以空),使得每一个$A_i$与$\varepsilon - (D_i \cup A_i)$互相独立(对某个$D_i \subseteq \varepsilon$),如果对每个$1 \leqslant i \leqslant n$,满足$P_r(A_i) \leqslant 1/4$,$\sum_{A_j \in D_i} P_r(A_j) \leqslant 1/4$,则$\varepsilon$中所有事件都不发生的概率是正的.

定理1.2 (Lova´sz一般局部引理)[4] 考虑(典型的坏的)事件的集合$\varepsilon = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$,对每一个$A_i$,都存在$D_i$,使得每一个$A_i$与$\varepsilon - (D_i \cup A_i)$互相独立(对某个$D_i \subseteq \varepsilon$). 如果有实数$x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,1)$使得对每个$1 \leqslant i \leqslant n$,$P_r(A_i) \leqslant x_i \prod_{A_j \in D_i} (1 - x_j)$,则$\varepsilon$中所有事件都不发生的概率至少是$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) > 0$.

2 主要结果

定理2.1 对于任一最大度为d的直径为β的n阶图G,则$\chi'_{vd}(G) \leqslant 4(4d^{\beta+1} + 4d^{2\beta-1})$.

收稿日期: 2015-12-03
* 甘肃省高等学校科研项目(NO: 2015A-181),甘肃省教育科学"十二五"规划课题:(NO: GS [2015] GHB0903).

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证明　取 $k = 4(4d^{\beta+1} + 4d^{2\beta-1})$, $f: E \to \{1,2,\cdots,k\}$ 表示图 G 的边的随机染色,并且对于 $\forall e \in E(G)$, $f(e)$ 是从$\{1,2,\cdots,k\}$ 中均匀地随机地选择的. 为了保证点可区别边染色,必满足两条件:

(A) 正常边染色——任意两条相邻的边不能染成同一种颜色;

(B) 点可区别——没有任意一对顶点关联同样的颜色集合,即对 $\forall u,v, S(u) \neq S(v)$,其中 $S(u)$ 表示与顶点 u 关联的边所染颜色集合.

由此定义如下坏事件:

(I) 对每一对相邻的边 $A = \{e_1,e_2\}$,令 E_A 表示 e_1 和 e_2 被染成同种颜色的事件;

(II) 对距离不超过 β 的任意两点 u 和 v, $d(u) = d(v)$,其中 $d(x)$ 表示 x 点的度,令 E_B 为点 u 和 v 的色集合 $S(u) = S(v)$ 的事件.

如果事件(I),(II) 都不发生,则 f 是图 G 的点可区别边染色.

1) 计算坏事件发生的概率

$$p_r(E_A) = \frac{1}{k}, p_r(E_B) = \frac{1}{\binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{d}} < \frac{1}{dk}$$

2) 计算相关事件数

构造相关图 H,其结点为两种类型的所有事件,其中两个结点 E_x 和 E_y 相关,当且仅当 x 和 y 包含一公共元素. 因为每个事件 E_x 的发生仅依赖于 x 的元素,所以 H 是上述事件的相关图. 每个事件与其他事件的相关数,为了计算方便均取其上界.

为了使用非对称的局部引理,需满足下列条件成立:

(1) $p_r(E_A) = \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{4}(k \geqslant 4)$,且 $4d \cdot \frac{1}{k} + 3d^{\beta} \cdot \frac{1}{dk} < \frac{1}{4}$;

(2) $p_r(E_B) = \frac{1}{dk} \leqslant \frac{1}{4}(dk \geqslant 4)$,且 $4d^{\beta+1} \cdot \frac{1}{k} + d^{2\beta} \cdot \frac{1}{dk} = \frac{4d^{\beta+1} + d^{2\beta-1}}{k} < \frac{1}{4}$; k 取 $4(4d^{\beta+1} + 4d^{2\beta-1})$,即 G 存在 k - 点可区别边染色.

定理 2.2　对于任一最大度为 d 的直径为 β 的 n 阶图 G,则 $\chi'_{vd}(G) \leqslant 16d^{\beta+1} + 2d^{2\beta}$.

证明　取 $k = 16d^{\beta+1} + 2d^{2\beta}$, $f: E \to \{1,2,\cdots,k\}$ 表示 G 的边的随机染色,并且对于 $\forall e \in E(G)$, $f(e)$ 是从$\{1,2,\cdots,k\}$ 中均匀地随机地选择的. 为了保证点可区别边染色,必须满足下面两个条件:

(A) 正常边染色——没有两条相邻的边染成同一种颜色;

(B) 点可区别——没有任意一对顶点关联同样的颜色集合,即对 $\forall u,v, S(u) \neq S(v)$,其中 $S(u)$ 表示与顶点 u 关联的边所染颜色集合.

由此定义如下坏事件:

(I) 对每一对相邻的边 $A = \{e_1,e_2\}$,令 E_A 表示 e_1 和 e_2 被染成同种颜色的事件;

(II) 对距离不超过 β 的任意两点 u 和 v, $d(u) = d(v)$,其中 $d(x)$ 表示 x 点的度,令 E_B 为点 u 和 v 的色集合 $S(u) = S(v)$ 的事件.

如果事件(I),(II) 都不发生,则 f 是 G 的点可区别的边染色.

1) 计算坏事件发生的概率

$$p_r(E_A) = \frac{1}{k}, p_r(E_B) = \frac{1}{\binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{d}} < \frac{1}{dk}.$$

2) 计算相关事件数

构造相关图 H,其结点为两种类型的所有事件,其中两个结点 E_x 和 E_y 相关,当且仅当 x 和 y 包含一公共元素. 因为每个事件 E_x 的发生仅依赖于 x 的元素,所以 H 是上述事件的相关图. 每个事件与其他事件的相关数,为了计算方便均取其上界,各事件之间的具体相关数见下表.

	Ⅰ	Ⅱ
Ⅰ	$4d$	$3d^{\beta}$
Ⅱ	$4d^{\beta+1}$	$d^{2\beta}$

3) 构造常数. 令 $a = \frac{2}{k}, b = \frac{2}{kd}$ 分别表示和(I)中的事件(II)中的事件相关的常数.

4) 为了证明坏事件不发生的概率为正,只需证明以下两个不等式;

$$\frac{1}{k} \leqslant a(1-a)^{4d}(1-b)^{3d\beta}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{kd} \leqslant b(1-a)^{4d^{\beta+1}}(1-b)^{d^{2\beta}}. \tag{2}$$

因为对所有实数 $z > 2$, $\left(1 - \frac{1}{z}\right)^z \geqslant \frac{1}{4}$,有:

$$\left(1 - \frac{2}{k}\right)^{4d} \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{8d}{k}}, \tag{3}$$

$$\left(1 - \frac{2}{kd}\right)^{3d\beta} \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{6d\beta-1}{k}}, \tag{4}$$

$$\left(1 - \frac{2}{k}\right)^{4d^{\beta+1}} \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{8d^{\beta+1}}{k}}, \tag{5}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\left(1-\frac{2}{kd}\right)^{d^{2\beta}} \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2d^{2\beta}-1}{k}}. \quad (6)$$

由(3),(4),(5),(6)可得(1),(2)的变形式:

$$1 \leqslant 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16d}{k}+\frac{6d\beta}{kd}} \leqslant 2^{1-\left(\frac{16d}{k}+\frac{6d\beta}{kd}\right)}, \quad (7)$$

$$1 \leqslant 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16d^{\beta+1}}{k}+\frac{2d^{2\beta}}{kd}} \leqslant 2^{1-\left(\frac{16d^{\beta+1}}{k}+\frac{2d^{2\beta}}{kd}\right)}, \quad (8)$$

显然,要使(7),(8)成立,只需 $1-\left(\frac{16d^{\beta+1}}{k}+\frac{2d^{2\beta}}{kd}\right)\geqslant 0$ 即可. 因此有

$$\chi'_{vde}(G) \leqslant 16d^{\beta+1}+2d^{2\beta}.$$

参 考 文 献

[1] 张东翰,张忠辅. 图的邻点强可区别全色数的上界[J]. 数学进展,2011,40(2):168-172.

[2] 田京京. 图的 D(β)-点可区别边染色及其概率方法[D]. 兰州:西北师范大学,2007.

[3] 陆尚辉. 概率方法与邻点可区别全染色的色数上界[D]. 北京:中央民族大学,2013.

[4] Molloy Michael, Reed Bruce. Graph colouring and the probabilistic method[M]. New York: Springer, 2002,23:329-356.

[5] Zhang Z F, Li J W, Zhao C C, et. al. On the vertex-distinguishing-equitable edge chromatic number of some join graphs[J]. ACTA Mathematics Sinica. 2007,50(1):197-204.

[6] Zhang Zhongfu, ChenXiang'en, Li Jingwen, et. al. On the Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring of Graphs[J]. Science in China, Ser A Mathematics,2005,48(3):289-299.

An Upper Bound for the Vertex-Distinguishing Edge Chromatic Number of Graphs

Cui Junfeng

(The Department of Mathematics, Longnan Teachers' College, Chengxian Gansu 742500)

Abstract

The paper mainly discusses the vertex distinguishing edge coloring using the Lovasz Lemma.

Key words: the Lova'sz Lemma, the probabilistic methods, vertex distinguishing equitable edge coloring, UpperBoundary.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net