首都师范大学学报(自然科学版)
第 41 卷　第 5 期　Journal of Capital Normal University　No. 5
2020 年 10 月　(Natural Science Edition)　Oct. ,2020

反演点连线垂线的包络图像

田朋朋　朱一心

(首都师范大学数学科学学院,北京　100048)

摘要:通过运用 GeoGebra 软件,本文画出了分别以圆锥曲线的焦点、中心和顶点为反演中心时,反演点连线垂线的包络图像. 当反演中心是圆锥曲线的焦点时,证明了反演点连线垂线的包络图像为圆. 据此给出了轨迹法画圆锥曲线和包络法画圆锥曲线的方法.

关键词:圆锥曲线;反演;包络;轨迹法

中图分类号:O182. 1　　**DOI**:10. 19789/j. 1004-9398. 2020. 05. 002

0　引　言

柯朗和罗宾[1]介绍了直线与圆的反演的 4 个性质并给出了初等几何证明. 柯熙[2]研究了以圆锥曲线的焦点为反演中心时椭圆、双曲线和抛物线的反演像均为帕斯卡蜗线. 本研究在原像与反演像的连线端点处作一垂线,当反演点取遍整个圆锥曲线时,此垂线包络形成的图像. 首先利用 GeoGebra 软件画出了分别以圆锥曲线的焦点、中心和顶点为反演中心时,反演点连线垂线的包络图像,得到定理 1 ~3. 利用定理 1 给出一种轨迹法画圆锥曲线的统一方法,得到定理 4. 最后结合定理 4 给出圆锥曲线的包络形成法. 得到定理 5,并解析证明. 本文所述几何图形均指欧氏的平面几何图形.

1　反演点连线垂线的包络图像

圆反演的定义是常见的,例如参考文献[1].

定义 1[1]　在一确定的平面上,给定以 O 为中心(称为反演中心),以 R 为半径的圆 C. 点 C' 位于直线 OP 上,且使得 $OP \cdot OP' = R^2$,则点 P 和点 P' 互为关于给定圆 C 的反演点. P 到 P' 的变换叫做反演变换. 其中圆 C 称为反演基圆(图 1).

由定义可知,一个反演变换使圆 C 的内部变为圆 C 的外部. 因为,若 $OP < R$,则 $OP' > R$;若 $OP > R$,则 $OP' < R$. 平面上只有圆 C 本身的点在反演变换下保持不变.

若以反演基圆的圆心 O 为坐标原点建立平面直角坐标系,设平面上任意一点 P 的坐标为 (x,y),

收稿日期:2019-05-08

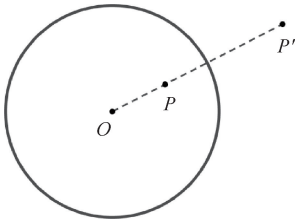


图 1　反演基圆

其在反演基圆下的反演点 P' 的坐标为 (x',y')(图 2). 此时,点 P 可用复数 $Z = x + y\mathrm{i}$ 来表示,点 P' 可用复数 $Z' = x' + y'\mathrm{i}$ 来表示.

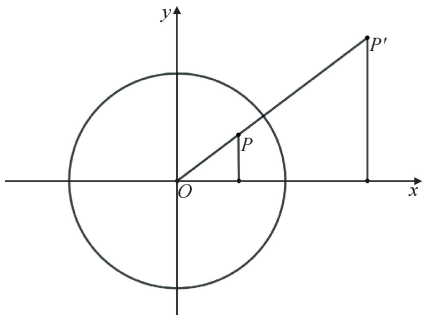


图 2　平面上任意一点 P 和反演点 P'

则由反演的定义得

$$|Z| \cdot |Z'| = R^2,$$

因此有

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{|Z|}{|Z'|} = \frac{|Z|^2}{|Z'| \cdot |Z|} = \frac{x^2 + y^2}{R^2},$$

整理得

$$\begin{cases} x' = \dfrac{R^2 x}{x^2 + y^2} \\ y' = \dfrac{R^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases}. \tag{1}$$

该式也被称为直角坐标系下反演变换的解析式.

利用反演变换的解析式,可以得到已知曲线反演后的曲线,研究曲线的反演像是曲线研究的一个有趣方法. 一般来说,对于同一条曲线,选取不同的点作为反演中心,反演后得到的曲线形状也不同. 但是,有的曲线在以特殊点为反演中心时,反演后得到的曲线却属于同一类型曲线. 例如下述命题 1.

命题 1[2] 若以二次曲线的一个焦点为反演中心,则二次曲线的反演像为帕斯卡蜗线[图 3(a)].

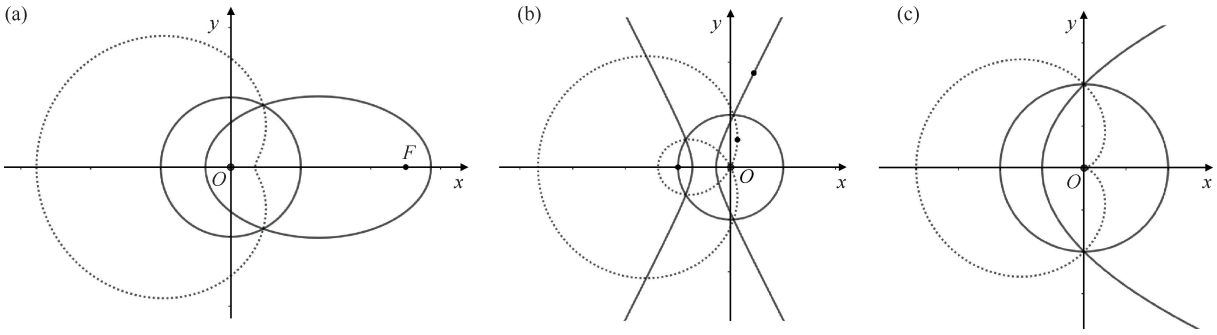


图 3 不同焦点为反演中心的反演像

(a)以椭圆的一个焦点;(b)以双曲线的一个焦点;(c)以抛物线的一个焦点

证明:设 $P(x,y)$ 为焦点为 $(0,0)$ 的二次曲线上一点(图 4),设定直线为 $x=-p$,则根据二次曲线的几何定义,有

$$\frac{|PF|}{|PN|}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x+p|}=e(e\text{ 为二次曲线的离心率}),$$

即

$$e^2(x+p)^2=x^2+y^2,$$

将反演变换解析式代入得

$$e^2\left(\frac{R^2x'}{x'^2+y'^2}+p\right)^2=\left(\frac{R^2x'}{x'^2+y'^2}\right)^2+\left(\frac{R^2y'}{x'^2+y'^2}\right)^2,$$

整理后得

$$\left(x'^2+y'^2+\frac{R^2}{p}x'\right)^2=\frac{R^4}{e^2p^2}(x'^2+y'^2).$$

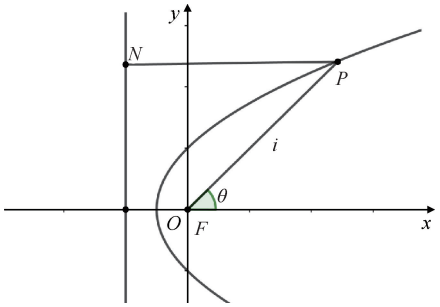


图 4 焦点为 $(0,0)$ 的二次曲线上的任一点 P

若令 $A=\frac{R^2}{p}$, $B=\frac{R^2}{ep}$,上式可写为 $(x'^2+y'^2+Ax')^2=B^2(x'^2+y'^2)$,此方程为帕斯卡蜗线方程,其极坐标方程为 $\rho=-A\cos\theta+B$. 且当二次曲线为抛物线时,$e=1$. 整理后的方程为 $x'^2+y'^2+Ax'=A\sqrt{x'^2+y'^2}$,此方程为心脏线方程.

直观地看,二次曲线可以由空间质点在某种条件下运动的轨迹来定义,即以动点来描述二次曲线. 二次曲线又是其切线族的包络. 而帕斯卡蜗线可以由平面内一定点 M 向一定圆的所有切线所作垂线的垂足轨迹来定义,若在图 3 中的帕斯卡蜗线上任取一点,并过该点作与其反演点连线的垂线,此处将反演点连线的垂线定义为过一点作该点与其反演点的连线,并过该点作此连线的垂线,称为过该点的反演点连线的垂线. 当另一反演点在椭圆、双曲线和抛物线上运动时,此垂线簇包络会形成什么样的曲线呢? 下面首先给出曲线族包络的定义:

定义 2[3] 设给定单参数曲线族

$$F(x,y,c)=0,$$

$F(x,y,c)$ 是 (x,y,c) 的连续可微函数,其中 c 是参数. 曲线族 $F(x,y,c)$ 的包络是指这样的曲线:本身并不包含在曲线族 $F(x,y,c)$ 中,但过这曲线的每一点,有曲线族中的一条曲线和在这点相切.

若以二次曲线的一个焦点为反演中心,P 为圆锥曲线上一动点,P' 为 P 关于给定圆 C 的反演点,过点 P' 作线段 PP' 的垂线. 当点 P 在圆锥曲线上运动时,用 GeoGebra 画出此垂线簇包络图像(图 5). 由图 5 可知,此垂线簇包络形成的曲线为圆. 若要给出严格的解析证明,需给出曲线簇包络的求法.

求法[3] 由微分几何学知,曲线族 $F(x,y,c)$ 的包络包含在方程组

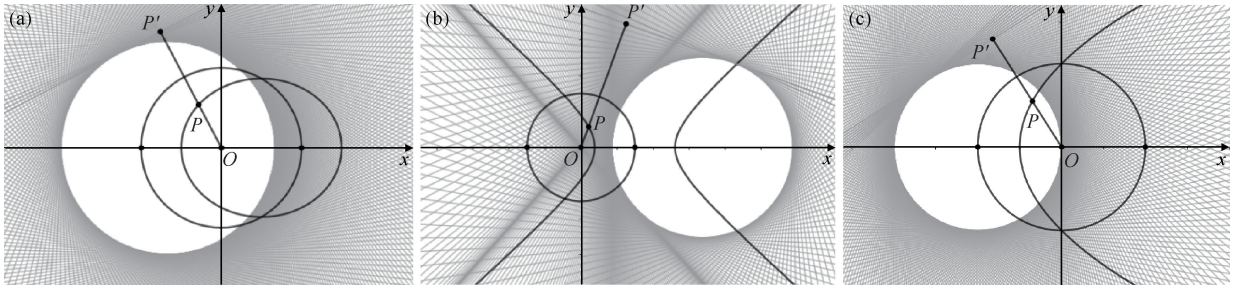


图 5　不同焦点为反演中心时反演点连成垂线的包络图像
(a)以椭圆的一个焦点;(b)以双曲线的一个焦点;(c)以抛物线的一个焦点

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases}$$

消去 c 而得到的曲线族中. 因此消去方程组中的参数 c, 求得包络满足的曲线称为 $F(x,y,c)$ 的 c - 判别曲线. 值得注意的是,在 c - 判别曲线中有时除去包络外,还有其他曲线. 因此需要检验 c - 判别曲线中究竟哪一条是包络曲线.

运用曲线簇包络的求法,以反演中心为原点建立平面直角坐标系,可得出定理 1.

定理 1　设反演基圆 C 的半径为 R, P 为圆锥曲线上一动点, P' 为 P 关于给定圆 C 的反演点,过点 P' 作线段 PP' 的垂线 L.

(1)当以椭圆的左焦点为反演中心时,垂线 L 包络形成的曲线是以 $\left(-\frac{R^2c}{b^2},0\right)$ 为圆心,半径为 $\frac{R^2a}{b^2}$ 的一个圆. a、b 和 c 分别为椭圆的长半轴长、短半轴长和焦半距长.

(2)当以双曲线的左焦点为反演中心时,垂线 L 包络形成的曲线是以 $\left(\frac{R^2c}{b^2},0\right)$ 为圆心,半径为 $\frac{R^2a}{b^2}$ 的一个圆. a、b 和 c 分别为双曲线的实半轴长、虚半轴长和焦半距长.

(3)当以抛物线的焦点为反演中心时,垂线 L 包络形成的曲线是以 $\left(-\frac{R^2}{p},0\right)$ 为圆心,半径为 $\frac{R^2}{p}$ 的一个圆. p 为抛物线的焦点到准线的距离.

证明:只对定理 1 中的(1)进行证明,(2)~(3)的证明方法与(1)的类似. 如图 4 所示,以基圆圆心 O 为原点建立直角坐标系. 设反演基圆为 $x^2 + y^2 = R^2$, 焦点为原点的椭圆方程为 $\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 设 $P(x,y)$ 为椭圆上一点,则由反演变换解析式可知其关于基圆的反演点为 $P'\left(\frac{xR^2}{x^2+y^2},\frac{yR^2}{x^2+y^2}\right)$, 且 $k_{OP'} = \frac{y}{x}$, 则垂直于 OP' 的直线 L 可设为

$$v - \frac{yR^2}{x^2+y^2} = -\frac{x}{y}\left(u - \frac{xR^2}{x^2+y^2}\right). \tag{2}$$

因为点 $P(x,y)$ 在椭圆

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

上,联立方程(2)~(3)消去 y 得

$$(b^2v^2 + a^2u^2)x^2 - (2b^2v^2c + 2a^2uR^2)x + a^2R^4 - b^4v^2 = 0,$$

令
$$F(u,v,x) = (b^2v^2 + a^2u^2)x^2 - (2b^2v^2c + 2a^2uR^2)x + a^2R^4 - b^4v^2, \tag{4}$$

则
$$F'_x(u,v,x) = (2b^2v^2 + 2a^2u^2)x - (2b^2v^2c + 2a^2uR^2). \tag{5}$$

联立(4)式和(5)式消去 x 得

$$b^4c^2v^4 + 2a^2b^2R^2cv^2u = a^2b^2R^4v^2 - b^6v^4 - a^2b^4v^2u^2,$$

等式两边同时除以 b^2v^2 得

$$b^2c^2v^2 + 2a^2R^2cu = a^2R^4 - b^4v^2 - a^2b^2u^2,$$

即
$$a^2b^2u^2 + (b^2c^2 + b^4)v^2 + 2a^2R^2cu - a^2R^4 = 0,$$

即
$$a^2b^2u^2 + a^2b^2v^2 + 2a^2R^2cu - a^2R^4 = 0,$$

等式两边同时除以 a^2b^2 得

$$u^2 + v^2 + \frac{2R^2c}{b^2}u - \frac{R^4}{b^2} = 0,$$

整理后得
$$\left(u + \frac{R^2c}{b^2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{R^2a}{b^2}\right)^2.$$ 此曲线为以 $\left(-\frac{R^2c}{b^2},0\right)$ 为圆心,半径为 $\frac{R^2a}{b^2}$ 的一个圆.

以圆锥曲线中心或顶点为反演中心,反演点连线垂线包络形成的图像同样具有较强的统一性. 下面以基圆圆心 O 为原点建立直角坐标系,用 GeoGebra 分别画出以圆锥曲线的中心、顶点为反演中心时反演点连线垂线的包络图像,得到定理 2 和 3.

定理 2　当以焦点在 x 轴上的椭圆的中心为反演中心时,反演点连线垂线包络形成的图像为焦点

在 y 轴上的椭圆[图 6(a)];当以焦点在 x 轴上的双曲线的中心为反演中心时,反演点连线垂线包络形成的图像为焦点在 x 轴上的双曲线[图 6(b)].

定理 3　当以椭圆的左顶点为反演中心时,反演点连线垂线包络形成的图像为过点 $\left(\frac{R^2}{2a},0\right)$ 的抛物线(R 为反演基圆半径,a 为椭圆的长半轴长)[图 7(a)];当以双曲线的左顶点为反演中心时,反演点连线垂线包络形成的图像为过点 $\left(\frac{R^2}{2a},0\right)$ 抛物线(R 为反演基圆半径,a 为双曲线的实半轴长)[图 7(b)];当以抛物线的中心为反演中心时,反演点连线垂线包络形成的图像为过反演中心的抛物线[图 7(c)].

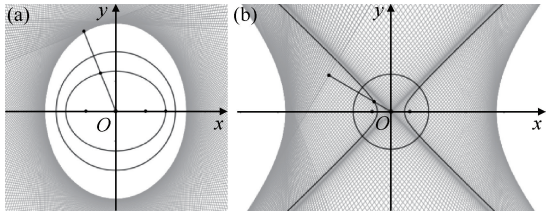


图 6　不同焦点为反演中心的反演点连线垂线的包络图像
(a)焦点在 x 轴上的椭圆的中心;(b)焦点在 x 轴上的双曲线的中心

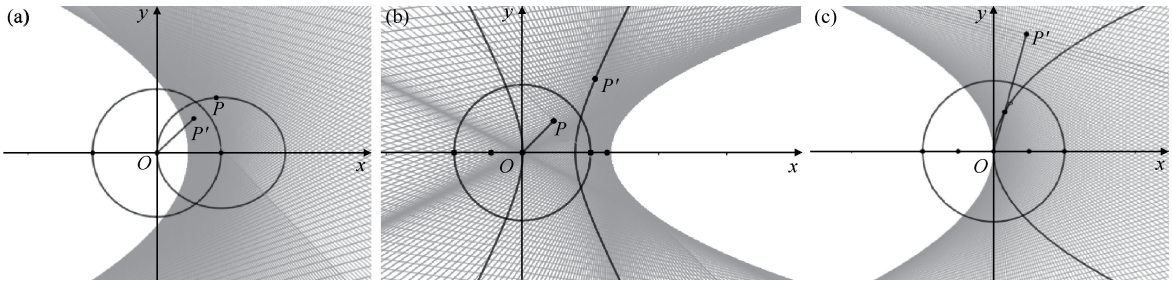


图 7　不同焦点为反演中心的反演点连线垂线包络形成的图像
(a)椭圆的左顶点;(b)双曲线的左顶点;(c)抛物线的左顶点

2　轨迹法画圆锥曲线的统一方法

在定理 1 中,当以圆锥曲线的一个焦点为反演中心时,反演点连线垂线包络形成的曲线都是圆.反之,2 个特定位置下的圆在某种反演变换的作用下的反演图像一定是圆锥曲线.据此,下面给出如下一种轨迹法画圆锥曲线的统一方法.

(1)分别以 O, O_1 为圆心,作 2 个半径为 R 的圆,为了简化作图与证明,可使圆心 O 与圆心 O_1 在一条直线上;

(2)过圆 O 上一点 A 作圆 O 的切线 L;

(3)过圆心 O_1 作一垂直于切线 L 的垂线段,垂足设为 P;

(4)作点 P 关于圆 O_1 的反演点 P',当点 A 取遍圆 O 上所有点时,点 P' 的轨迹就是圆锥曲线.

由此可得到定理 4.

定理 4　设圆 O_1 和圆 O 的半径都为 R,点 A 为圆 O 上任意一点,L 为过点 A 的切线.作直线 O_1P 垂直于切线 L 于点 P,作点 P 关于圆 O_1 的反演点 P'.当点 A 取遍圆 O 上所有点时,点 P' 的轨迹为圆锥曲线.若设圆心 O_1 与圆心 O 之间的距离为 d,则

(1)当 $d < R$ 时,点 P' 的轨迹为椭圆[图 8(a)];

(2)当 $d > R$ 时,点 P' 的轨迹为双曲线[图 8(b)];

(3)当 $d = R$ 时,点 P' 的轨迹为抛物线[图 8(c)].

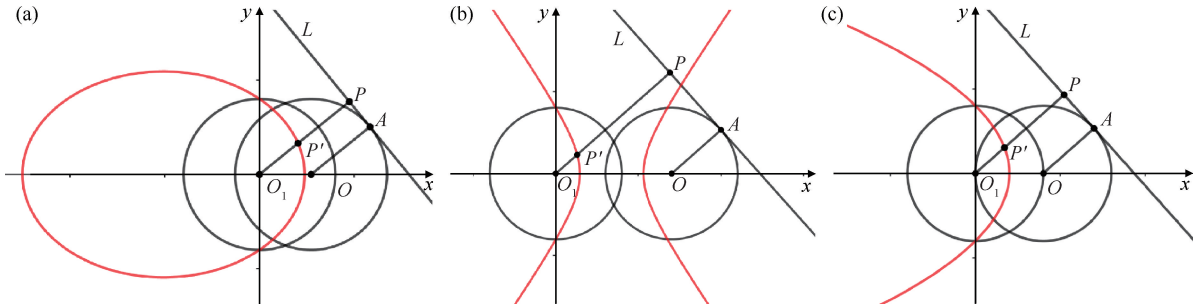


图 8　d 不同时点 P' 的轨迹
(a) $d < R$; (b) $d > R$; (c) $d = R$

证明:以 O_1 为原点建立直角坐标系(图 9),则 $O_1(0,0)$, $O(d,0)$. 设 A 点坐标为 (x_0,y_0), 圆 O_1 方程为 $x^2+y^2=R^2$, 圆 O 方程为 $(x-d)^2+y^2=R^2$. 直线 OA 与直线 O_1P 的斜率相等且为 $k_{OA}=k_{O_1P}=\dfrac{y_0}{x_0-d}$, 则直线 L 方程为

$$y=-\frac{x_0-d}{y_0}(x-x_0)+y_0,$$

直线 O_1P 方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-d}$,

联立直线 L 方程与直线 O_1P 方程,解得

$$P\left(\frac{x_0(x_0-d)^2+y_0^2(x_0-d)}{(x_0-d)^2+y_0^2},\frac{x_0y_0(x_0-d)+y_0^3}{(x_0-d)^2+y_0^2}\right).$$

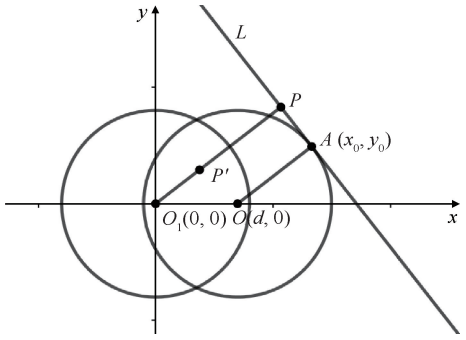


图 9　以圆心 O 为原点建立直角坐标系

因为点 $A(x_0,y_0)$ 在圆 O 上,则有

$$(x_0-d)^2+y_0^2=R^2. \tag{6}$$

将式(4)代入点 P 坐标得

$$\left(\frac{d(x_0-d)^2+R^2(x_0-d)}{R^2},\frac{y_0d(x_0-d)+y_0R^2}{R^2}\right),$$

因点 P 与点 P' 互为反演点,若设 P 点坐标为 (x,y), P' 点坐标为 (x',y'), 则根据反演的定义有

$$\frac{x'}{y'}=\frac{x}{y}=\frac{OP'}{OP}=\frac{OP'\cdot OP}{OP^2}=\frac{R^2}{x^2+y^2},$$

即

$$\begin{cases}x'=\dfrac{xR^2}{x^2+y^2}\\ y'=\dfrac{yR^2}{x^2+y^2}\end{cases},$$

将点 $P\left(\dfrac{d(x_0-d)^2+R^2(x_0-d)}{R^2},\dfrac{y_0d(x_0-d)+y_0R^2}{R^2}\right)$ 代入上式得

$$\begin{cases}x'=\dfrac{(x_0-d)R^2}{d(x_0-d)+R^2}\\ y'=\dfrac{y_0R^2}{d(x_0-d)+R^2}\end{cases},$$

整理后得

$$\begin{cases}x_0-d=\dfrac{x'R^2}{R^2-x'd}\\ y_0=\dfrac{y'R^2}{R^2-x'd}\end{cases}. \tag{7}$$

此时联立式(6)与(7)式得

$$\frac{x'^2R^4}{(R^2-x'd)^2}+\frac{y'^2R^4}{(R^2-x'd)^2}=R^2,$$

整理后得

$$(R^2-d^2)x'^2+y'^2R^2+2R^2dx'-R^4=0. \tag{8}$$

最后整理得

$$\frac{(R^2-d^2)^2}{R^6}\left(x'+\frac{R^2d}{R^2-d^2}\right)^2+\frac{R^2-d^2}{R^4}y'^2=1. \tag{9}$$

则由式(8)可得,当 $d=R$ 时, $y'^2=-2R\left(x'-\dfrac{R}{2}\right)$, 其轨迹为抛物线. 由式(9)可得,当 $d<R$ 时,其轨迹为椭圆;当 $d>R$ 时,其轨迹为双曲线.

3　圆锥曲线的包络形成法

在定理 4 中,若在圆 O 上任取一点,作该点与其关于圆 O_1 的反演点的连线,并过该点的反演点作此连线的垂线,当该点在圆 O 上运动时,此垂线簇包络形成的曲线为圆锥曲线,得到定理 5.

定理 5　设圆 O_1 和圆 O 的半径都为 R, 点 P 为圆 O 上任意一点,点 P 关于圆 O_1 的反演点为 P', 过点 P' 且垂直于直线 PP' 的直线为 L. 当点 P 取遍圆 O 上所有点时,直线 L 的包络图像为圆锥曲线. 若设 2 个圆心之间的距离为 d, 则

(1) 当 $d<R$ 时,直线 L 的包络图像为椭圆,如图 10(a);

(2) 当 $d>R$ 时,直线 L 的包络图像为双曲线,如图 10(b);

(3) 当 $d=R$ 时,直线 L 的包络图像为抛物线,如图 10(c).

证明:以圆 O_1 的圆心为原点建立直角坐标系. 设反演基圆为 $x^2+y^2=R^2$, 圆 O 方程为 $(x-d)^2+y^2=0$, 设 $P(x,y)$ 为圆上一点,则由反演变换解析式可知其关于基圆的反演点为 $P'\left(\dfrac{xR^2}{x^2+y^2},\dfrac{yR^2}{x^2+y^2}\right)$, 且 $k_{OP'}=\dfrac{y}{x}$, 则过 P' 且垂直于直线 PP' 的直线可设为

$$v-\frac{yR^2}{x^2+y^2}=-\frac{x}{y}\left(u-\frac{xR^2}{x^2+y^2}\right). \tag{10}$$

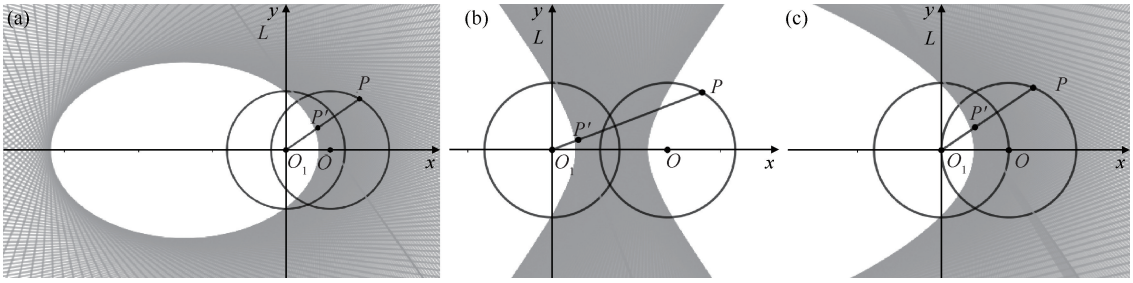


图 10 d 不同时直线 L 的包络图像

(a) $d < R$; (b) $d > R$; (c) $d = R$

因为点 $P(x,y)$ 在圆

$$(x-d)^2+y^2=R^2 \text{ 上}, \tag{11}$$

联立式(10)和(11)消去 y 得

$$(u^2+v^2)x^2+(2y^2d-2xR^2)x_0+y^2(d^2-R^2)+R^4=0,$$

令

$$F(u,v,x)=(u^2+v^2)x^2+(2y^2d-2xR^2)x+y^2(d^2-R^2)+R^4, \tag{12}$$

则

$$F_x(u,v,x)=2(u^2+v^2)x+(2y^2d-2xR^2), \tag{13}$$

联立式(12)和(13)消去 x 整理后得

$$(R^2-d^2)u^2+R^2v^2-2dR^2u-R^4=0, \tag{14}$$

最后整理得

$$\left(u-\frac{dR^2}{R^2-d^2}\right)^2+\frac{R^2}{R^2-d^2}v^2=\frac{R^6}{(R^2-d^2)^2}, \tag{15}$$

则由式(14)可得,当 $d=R$ 时,其轨迹为抛物线. 由式(15)可得,当 $d<R$ 时,其轨迹为椭圆;当 $d>R$ 时,其轨迹为双曲线.

参 考 文 献

[1] 柯朗,罗宾. 什么是数学[M]. 左平,张饴慈,译. 上海:复旦大学出版社,2016.

[2] 柯熙. 反演变换[J]. 韩山师范学院学报,1984(4):12-26.

[3] 王高雄,周之铭. 常微分方程[M]. 北京:高等教育出版社,2006.

The Envelope Image of the Vertical Line Connecting the Inversion Point

TIAN Pengpeng ZHU Yixin

(School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract: By using the GeoGebra software, this paper draws the envelope images of the vertical line connecting the inversion points with the focus, center and vertex of the conic curve respectively. When the focus of the conic curve is the inversion center, the envelope image of the vertical line connecting the inversion point is a circle. This paper gives the methods of drawing the conic curve with the method of trajectory and envelope accordingly.

Keywords: conic curve; inversion; envelope; method of trajectory