DOI:10.19789/j.1004-9398.2017.06.001

首都师范大学学报(自然科学版)
第38卷 第6期 Journal of Capital Normal University No. 6
2017年12月 (Natural Science Edition) December, 2017

共振条件下具有奇异性和无界扰动Duffing方程的周期解*(上)

马田田[1] 张铁荟[2] 黄 艳[3]

(1. 首都师范大学,北京 100048; 2. 济宁学院初等教育学院,山东 曲阜 273165; 3. 枣庄职业学院基础教学部,山东 枣庄 277800)

摘 要

本文研究了共振条件下具有奇异性和无界扰动Duffing方程周期解的存在性. 应用相平面分析的方法和连续性定理证明了给定方程至少存在一个周期解.

关键词: Duffing方程,周期解,奇异性,连续性定理.

中图分类号: O175.1

1 前言及主要结果

本文研究具有奇异性Duffing方程

$$x'' + g(x) = p(t) \tag{1}$$

周期解的存在性,这里 $g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 是局部李普西茨的连续函数,并且在零点具有奇异性,$p:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的 2π 周期函数.

由于具有奇异性微分方程在理论和实践中的重要应用,关于这类方程的周期解问题受到了广泛的关注(见[1-5,7-14,18]及其参考文献). 假定 g 满足条件

$$(h_1)\qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty,$$

和

$$\frac{n^2}{4} < \liminf_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} \leqslant \limsup_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} < \frac{(n+1)^2}{4},\quad (n\in\mathbf{N}).$$

另外,g 的原函数 G 满足

$$(h_2)\qquad \lim_{x\to 0^+} G(x) = +\infty,$$

这里 $G(x) = \int_1^x g(u)\,du$. 文献[15]证明了方程(1)至少存在一个 2π 周期解. 文献[16]进一步研究了如下方程的周期解

$$x'' + \frac{1}{4}n^2x + g(x) = p(t),\ n\in\mathbf{N}. \tag{2}$$

假定极限

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = g(+\infty) \tag{3}$$

存在且有限. 同时,g 在原点处满足奇异性条件

$$\frac{\eta_1}{x^\gamma} \leqslant -g(x) \leqslant \frac{\eta_2}{x^\gamma},\quad x\in(0,\delta), \tag{4}$$

其中 η_1,η_2,δ 和 $\gamma\geqslant 1$ 是正常数. 当条件(3)和(4)成立,并且 2π 周期函数

$$\Phi(\theta) = 4g(+\infty) - \int_0^{2\pi} p(t)\left|\sin\left(\theta+\frac{nt}{2}\right)\right|dt,\quad (\theta\in\mathbf{R})$$

保持常号时,[16]证明了方程(2)至少存在一个正的 2π 周期解. 文献[16]中的结果在[17]得到了进一步的推广. 假定当 $x>0$ 充分大时,$g(x)$ 是有界的,并且

$$(h_3)\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{G(x)}{g(x)} = 0.$$

容易验证条件 (h_i) $(i=1,2,3)$ 推广了条件(4).

本文研究当 $g(x)$ $(x>0$ 充分大$)$ 无界时,方程(2)周期解的存在性. 假定 g 满足条件

$$(h_4)\qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty,$$

而 G 满足次二次条件

$$(h_5)\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{x^2} = 0.$$

应用连续性定理和相平面分析的方法,本文证明了以下定理.

定理1.1 假定条件 (h_i) $(i=1,\cdots,5)$ 成立,则方程(2)至少存在一个 2π 周期解.

推论1.2 假定条件 (h_i) $(i=1,\cdots,4)$ 成立,并且 g 满足次线性条件

收稿日期:2016-09-19

* 国家自然科学基金青年基金(项目号:11501381)资助项目.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0.$$

则方程(2)至少存在一个2π周期解.

注记 1.3 为了方便起见,在下文中,我们把奇异点 0 平移至 -1. 考虑有奇异性方程

$$x''+\frac{1}{4}n^2x+g(x)=p(t),(n\in\mathbf{N}),\quad (2')$$

这里 $g:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$ 是局部李普西茨的连续函数,并且在 $x=-1$ 处具有奇异性. 假定下面的条件成立,

(h_1') $\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=-\infty$,

(h_2') $\lim\limits_{x\to-1^+}G(x)=+\infty$,$(G(x)=\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s)$,

(h_3') $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{G(x)}{g(x)}=0.$

我们将研究当 (h_i') $(i=1,2,3)$ 和 (h_4),(h_5) 成立时,方程(2′)周期解的存在性.

在本文中,我们分别用 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{N}$ 表示实数集和自然数集. 对于函数 $I=I(c,\cdot)$,记号 $I=o\left(\frac{1}{c}\right)$ (或 $I=o(1)$) 即当 $c\to\infty$ 时,$c\cdot I\to 0$ (或 $I\to 0$) 对其它变量一致成立.

2 基本引理

我们将应用连续性定理研究方程(2′)周期解的存在性. 为此,先把方程(2′)嵌入到一个含单参数 $\lambda\in[0,1]$ 的方程族

$$x''+\frac{1}{4}n^2x+g(x)=\lambda p(t).\quad (5)$$

应用 [5] 中的方法,可以证明下面的连续性引理.

引理 2.1 假定条件 (h_1') 和 (h_4) 成立. 设存在一个常数 $\xi>0$ 使得若 $x(t)$ 是方程(5)的一个2π周期解($\lambda\in[0,1]$),则

$$x(t)\leqslant\xi,\quad t\in[0,2\pi].$$

则方程(2′)至少存在一个2π周期解.

为了应用连续性引理 2.1 证明方程(2′)周期解的存在性,考虑方程(5)的等价平面系统

$$x'=y,\quad y'=-\frac{1}{4}n^2x-g(x)+\lambda p(t).\quad (6)$$

令 $(x(t,s),y(t,s))=(x(t,x_0,y_0,\lambda),y(t,x_0,y_0,\lambda))$ 表示系统(6)满足初始条件

$$x(s,x_0,y_0,\lambda)=x_0,\quad y(s,x_0,y_0,\lambda)=y_0$$

的解. 当 $s=0$ 时,记$(x(t),y(t))=(x(t,0),y(t,0))$. 应用 [5] 中的方法,我们可以证明当条件 (h_1'),(h_2') 和 (h_4) 成立时,解$(x(t,s),y(t,s))$ 在整个 t 轴上唯一存在.

为刻画系统(6)的轨道 $(x(t,s),y(t,s))$ 所处的位置,我们引进函数 $\zeta:(-1,+\infty)\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$\zeta(x,y)=x^2+y^2+\frac{1}{(1+x)^2}.$$

引理 2.2 ([2]) 假定条件 (h_i') $(i=1,2)$ 和 (h_4) 成立. 则对任意 $\zeta>0$,存在一个充分大的 $\zeta_0>0$,使得若 $\zeta(x_0,y_0)\geqslant\zeta_0^2$,则

$$\zeta(x(t,s),y(t,s))\geqslant\zeta^2$$

对任意 $t,s\in[0,2\pi]$ 一致成立.

根据引理 2.2 可知如果 $\zeta(x_0,y_0)$ 充分大,则 $x^2(t)+y^2(t)>0$,$t\in[0,2\pi]$. 这时我们可以引进极坐标变换

$$x=r\cos\theta,\quad y=\frac{n}{2}r\sin\theta.$$

在此变换下系统(6)变成系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{n}{2}-\dfrac{2}{nr}g(r\cos\theta)\cos\theta+\dfrac{2}{nr}\lambda p(t)\cos\theta,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{2}{n}g(r\cos\theta)\sin\theta+\dfrac{2}{n}\lambda p(t)\sin\theta.\end{cases}\quad (7)$$

令 $(r(t),\theta(t))=(r(t,r_0,\theta_0,\lambda),\theta(t,r_0,\theta_0,\lambda))$ 表示(7)满足初始条件$(r(0),\theta(0))=(r_0,\theta_0)$ 的解,其中 $x_0=r_0\cos\theta_0>-1$,$y_0=r_0\sin\theta_0$.

引理 2.3 ([7]) 假定条件 (h_i') $(i=1,2)$ 和 (h_4) 成立. 则存在 $\omega>0$ 和 $R_0>0$ 使得若 $\zeta(x_0,y_0)\geqslant R_0^2$,则 $\theta'(t)\leqslant-\omega<0$,$t\in[0,2\pi]$.

引理 2.4 假定条件 (h_i') $(i=1,2)$ 和 (h_i) $(i=4,5)$ 成立. 则存在一个常数 $\gamma>1$(γ 不依赖于 λ) 使得对于充分大的正数 c 和 $\cos\theta(t)\geqslant 0$,$t\in[0,2\pi]$,

$$\frac{c}{\gamma}\leqslant r(t)\leqslant\gamma c,\quad t\in[0,2\pi],$$

其中 $(r_0,\theta_0)\in\mathbf{R}^+\times S^1$ 满足

$$\left(r_0\cos\theta_0,\frac{n}{2}\sin\theta_0\right)\in\Gamma_c:\frac{1}{2}y^2+F(x)=F(c),$$

这里 $F(x)=\frac{1}{8}n^2x^2+G(x)$.

引理 2.5 假定条件 (h_i') $(i=1,2,3)$ 和 (h_i) $(i=4,5)$ 成立. 设$(x(t),y(t))$ 是系统(2.2)的一个解,其初始点 $(x_0,y_0)\in\Gamma_c$(Γ_c 的定义见引理 2.4). 令

$$x(t_1)=0,\quad x(t_2)=0,$$

且

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$x(t) < 0, t \in (t_1, t_2).$$

则当 $c \to +\infty$ 时,估计式

$$t_2 - t_1 = \frac{4}{nc} + o\left(\frac{1}{c}\right)$$

对任意 $(x_0, y_0) \in \Gamma_c$ 和 $\lambda \in [0,1]$ 一致成立.

引理 2.6　假定条件 (h_i') $(i = 1,2,3)$ 和 (h_i) $(i = 4,5)$ 成立. 设 $(x(t), y(t))$ 是系统(2.2)的过初始点 $(x_0, y_0) \in \Gamma_c$ 的解(Γ_c 的定义见引理 2.5),并且满足

$$x(t_1) = 0, \quad x(t_2) = 0,$$

和

$$x(t) > 0, \quad t \in (t_1, t_2).$$

则当 $c \to +\infty$ 时,估计式

$$t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{n} + o(1)$$

关于任意 $(x_0, y_0) \in \Gamma_c$ 和 $\lambda \in [0,1]$ 一致成立. 另外,对任意充分大的常数 $\alpha > 0$,存在 $c_0 > 0$ (c_0 不依赖于 λ) 使得当 $c \geqslant c_0$ 时,不等式

$$t_2 - t_1 \leqslant \frac{2\pi}{n} - \frac{\alpha}{c}$$

关于任意 $(x_0, y_0) \in \Gamma_c$ 和 $\lambda \in [0,1]$ 一致成立.

参 考 文 献

[1] Boscaggin A, Fonda A, Garrione M. A multiplicity result for periodic solutions of second order differential equations with a singularity [J]. Nonlinear Anal, 2012, 75: 4457 – 4470.

[2] Bonheure D, Fabry C, Smets D. Periodic solutions of forced isochronous oscillator at resonance [J]. Discrete Contin Dynam Systems, 2002, 8: 907 – 930.

[3] Capietto A, Dambrosio W, Liu B. On the boundedness of solutions to a nonlinear singular oscillator [J]. Z Angew Math Phys, 2009, 60: 1007 – 1034.

[4] Pino M Del, Manásevich R. Infinitely many T-periodic solutions for a problem arising in nonlinear elasticity [J]. J Differential Equations, 1993, 103: 260 – 277.

[5] Pino M Del, Manásevich R, Montero A. T-periodic solutions for some second order differential equations with singularities [J]. Proc R Soc Edinb A, 1992, 120: 231 – 243.

[6] Ding T, Iannacci R, Zanolin F. On periodic solutions of sublinear Duffing equations [J]. J Math Anal Appl, 1991, 158: 316 – 332.

[7] Fonda A, Toader R. Periodic orbits of radially symmetric Keplerian-like systems: a topological degree approach [J]. J Differential Equations, 2008, 244: 3235 – 3264.

[8] Habets P, Sanchez L. Periodic solutions of some Liénard equations with singularities [J]. Proc Amer Math Soc, 1990, 109: 1035 – 1044.

[9] Hakl R, Torres P, Zamora M. Periodic solutions of singular second order differential equations: upper and lower functions [J], Nonlinear Anal, 2011, 74: 7078 – 7093.

[10] Jiang D, Chu J, Zhang M. Multiplicity of positive periodic solutions to superlinear repulsive singular equations [J]. J Differential Equations, 2005, 211: 282 – 302.

[11] Lazer A C, Solimini S. On periodic solutions of nonlinear differential equations with singularities [J]. Proc Amer Math Soc, 1987, 88: 109 – 114.

[12] Torres P J. Existence of one-signed periodic solutions of some second order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem [J]. J Differential Equations, 2003, 190: 643 – 662.

[13] Torres P J. Weak singularities may help periodic solutions to exist [J]. J Differential Equations, 2007, 232: 277 – 284.

[14] Wang H. Positive periodic solutions of singular systems with a parameter [J]. J Differential Equations, 2010, 249: 2986 – 3002.

[15] Wang Z. Periodic solutions of the second order differential equations with singularities [J]. Nonlinear Anal, 2004, 58: 319 – 331.

[16] Wang Z, Ma T. Existence and multiplicity of periodic solutions of semilinear resonant Duffing equations with singularities [J]. Nonlinearity, 2012, 25: 279 – 307.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[17] Wang Z. Lazer-Leach type conditions on periodic solutions of semilinear resonant Duffing equations with singularities [J]. Z Angew Math Phys, 2014,65: 69 - 89.

[18] Zhang M. A relationship between the periodic and the Dirichlet BVPs of singular differential equations [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1998,128: 1099 - 1114.

Periodic Solutions of Duffing Equations with Singularities and Unbounded Perturbations at Resonance

Ma Tiantian[1] Zhang Tiehui[2] Huang Yan[3]

(1. Capital Normal University, Beijing 100048; 2. Elementary Education College, Jining University, Qufu Shandong 273165;
3. Basic Teaching Department, Zaozhuang Vocational College, Zaozhuang Shandong 277800)

Abstract

In this paper, we study the existence of periodic solutions of Duffing equations with singularities $x'' + \frac{1}{4}n^2x + g(x) = p(t)$, $(n \in \mathbf{N})$, where n is a positive integer and $g:(0, +\infty) \to \mathbf{R}$ is locally Lipschitz continuous and has a singularity at the origin. By using phase plane analysis method and the continuation theorem, we prove that the given equation has at least one periodic solution provided that g is unbounded and satisfies sub-quadratic condition at infinity.

Key words: Duffing equations, periodic solution, singularity, continuation theorem.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net