DOI:10.19789/j.1004-9398.2019.04.004

首都师范大学学报(自然科学版)
第40卷 第4期 Journal of Capital Normal University No. 4
2019年8月 (Natural Science Edition) Aug.,2019

二次 Riccati 方程不变量解法的进一步研究*

赵 临 龙

(安康学院数学与统计学院,陕西 安康 725000)

摘要: 本文在 Riccati 方程 $L[y]=0$ 的不变量关系式基础之上,给出非特解函数 y_0($L[y_0]\neq 0$) 满足不变量关系的一种确定方法,并且通过应用举例,说明该方法的实用性.

关键词: Riccati 方程; 精确解; 非特解函数; 应用举例

中图分类号: O175.2

0 引 言

1841年,Liouville 证明了二次 Riccati 方程:

$$L[y]=-y'+P(x)y^2+Q(x)+R(x),\quad (P(x)R(x)\neq 0), \tag{1}$$

其中 $P(x)$,$Q(x)$,$R(x)$ 为连续函数. 一般不能通过初等积分法求得方程(1)的初等函数表示的解. 但在实际工作中,又急迫需要方程(1)的精确解,如在微分方程中,三阶 Schwartz 微分方程、kdv 方程,以及科学问题中的扩散问题、鲁棒稳定性等,使 Riccati 方程依然成为具有挑战性的世界难题[1-2].

近三年来,有关 Riccati 方程研究文献不少[3-14]. 国内外学者利用各种研究方法确定方程(1)的精确解,是方程(1)研究的主流[1]. 如在文[3]中,对于 Riccati 方程求解,通过 G'/G 展开法,得到了 Riccati 方程形如 G'/G 的解,但其过程较复杂. 现对 Riccati 方程求解再作讨论.

对于方程(1),如果能找到该方程的一个特解函数 y_0,即 $L[y_0]=0$,则方程(1)化为可解的 Bernoulli 方程[2]. 但 Riccati 方程的特解 y_0 一般较难求. 我们将针对 Riccati 方程的一个非特解函数 y_0,即在 $L[y_0]\neq 0$ 的条件下,给出 Riccati 方程的求解过程.

收稿日期: 2018-07-05

* 高等学校大学数学教学研究与发展中心项目(CMC2017401);陕西省精品资源共享课程建设项目(2015-73);陕西省教育厅科研项目(15JK1016);安康学院首批省级教学成果奖培育项目(2018A-02)

1 Riccati 方程可积性理论

1998年,赵临龙提出 Riccati 的不变量概念,并且利用不变量概念,给出了 Riccati 的解法[13-14],引起了广泛关注并多次被引用.

为简化推理过程,我们将函数 $P(x)$,$Q(x)$,$R(x)$,简记为函数 P、Q、R.

定义1[2] 在 Riccati 方程(1)中,称 $I_1=PR$,$I_2=\frac{P'}{P}+Q$,为方程(1)的不变量.

定义2[2] 在 Riccati 方程(1)中,称 $I_1=P(x)L[y_0(x)]$,$I_2=\frac{P'(x)}{P(x)}+Q(x)+2P(x)y_0(x)$,为方程(1)的广义不变量,其中 $y_0(x)$ 为方程(1)的非特解函数.

定理[14] 在方程(1)中,如果存在常数 α,β,γ,以及函数 $y_0(x)$ 和可导函数 $G(x)$(其中 $G(x)\neq 0$),满足不变量关系:

$$I_1=P(x)L[y_0(x)]=\alpha\gamma G^2(x), \tag{2}$$

$$I_2=\frac{P'(x)}{P(x)}+Q(x)+2P(x)y_0(x)=\frac{G'(x)}{G(x)}+\beta G(x), \tag{3}$$

则方程(1)经线性变换:

$$y=\varphi(x)z+y_0(x),\ \varphi(x)=\alpha G(x)/P(x),\quad (\text{其中}\ \varphi(x)\neq 0) \tag{4}$$

可化成其积分形式:

$$\int\frac{dz}{\alpha z^2+\beta z+\gamma}=\int G(x)\,dx+c,\quad (c\ \text{为任意常数}). \tag{5}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2　Riccati 方程求解过程

在定理中,对于寻找非特解函数 y_0,确定 Riccati 方程(1)对应的函数 $L(y_0)$,成为解决实际问题的关键.

利用不变量关系式(2)和(3),给出一种确定非特解函数 y_0 的较简单方法.

此时,假如满足不变量关系式(2)的非特解函数 y_0,使得函数 $L(y_0)$ 满足:

$$I_1 = P(x)L[y_0(x)] = \alpha\gamma\Delta,(\Delta\text{为常数}),\quad(6)$$

则不变量关系式(3)满足:

$$I_2 = \frac{P'(x)}{P(x)} + Q(x) + 2P(x)y_0(x) = \beta\sqrt{|\Delta|}. \quad(7)$$

此时,非特解函数 y_0 满足:

$$y_0(x) = \frac{\beta\sqrt{|\Delta|}}{2P^2(2)} - \frac{P'(x)}{2P^2(x)} - \frac{Q(x)}{2P(x)}. \quad(8)$$

在(8)中,取特例 $\beta=0$,则非特解函数 y_0 满足:

$$y_0(x) = -\frac{P'(x)}{2P^2(x)} - \frac{Q(x)}{2P(x)}. \quad(9)$$

推论 1　对于 Riccati 方程(1),如果非特解函数 y_0 满足:

$$y_0(x) = -\frac{P'(x)}{2P^2(x)} - \frac{Q(x)}{2P(x)}. \quad(10)$$

则方程(1)经线性变换:

$$y = \frac{\alpha\sqrt{|\Delta|}}{P(x)}z + y_0(x)\ (\text{其中}\Delta\neq0),\quad(11)$$

化成积分形式:

$$\int\frac{dz}{\alpha z^2+\gamma} = \sqrt{|\Delta|}x + c,$$

$$(\text{其中}\Delta\neq0,c\text{为任意常数}). \quad(12)$$

推论 2　对于 Riccati 方程(1),如果函数 y_0 满足(10),则当 $L[y_0]=0$ 时,方程(1)的解是:

$$y = \left(\frac{-G}{P}\right)z + y_0 = \frac{-G}{P(x+c)} + y_0. \quad(13)$$

此时,由于 $L[y_0]=0$,则满足(10)的函数 y_0,对应于方程(1)的不变量关系结果为:

$$I_1 = P(x)L[y_0(x)] = 0 = \alpha\gamma G^2(x),\quad(14)$$

$$I_2 = \frac{P'(x)}{P(x)} + Q(x) + 2P(x)y_0(x) = 0$$

$$= \frac{G'(x)}{G(x)} + \beta G(x). \quad(15)$$

可取 $\alpha=-1,\beta=0,\gamma=0,G=1$,于是,有积分形式:

$$\int\frac{dz}{-z^2} = x + c\Leftrightarrow z = \frac{1}{x+c}. \quad(16)$$

则原方程的解是:

$$y = \left(\frac{-G}{P}\right)z + y_0 = \frac{-G}{P(x+c)} + y_0. \quad(17)$$

3　应用举例

针对文[3]的 Riccati 方程,给出新的解法,以显示本方法的优越性.

例 1[3]　解方程: $\frac{dy}{dx} = x^2y^2 + \frac{1}{x}y + \frac{(4\mu-\lambda^2)x^2+15}{4x^4}$.

记 $\Delta=\lambda^2-4\mu$,由于

$$y_0(x) = -\frac{P'(x)}{2P^2(x)} - \frac{Q(x)}{2P(x)} = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^3} = -\frac{3}{2x^3},$$

则 $L[y_0] = L\left[-\frac{3}{2x^3}\right] = -\frac{9}{2x^4} + \frac{9}{4x^4} - \frac{3}{2x^4} + \left(\frac{-\Delta}{4x^2} + \frac{15}{4x^4}\right) = \frac{-\Delta}{4x^2}$.

于是,得到:

$$I_1 = PL[y_0] = \frac{-\Delta}{4} = \alpha\gamma G^2,$$

$$I_2 = \frac{P'}{P} + Q + 2Py_0 = \frac{2}{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x} = 0 = \frac{G'}{G} + \beta G.$$

①当 $\Delta>0$,可取 $\alpha=1,\beta=0,\gamma=-1,G=\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$,于是,有积分形式:

$$\int\frac{dz}{z^2-1} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}x + c\Leftrightarrow z = -\operatorname{th}\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x + c.$$

则原方程的解是:

$$y = (\alpha\sqrt{|\Delta|}/P)z + y_0 = -\frac{3}{2x^3} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2x^2}\left(\operatorname{th}\frac{\sqrt{\Delta}}{x} + c\right).$$

②当 $\Delta<0$,可取 $\alpha=1,\beta=0,\gamma=1,G=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$,于是,有积分形式:

$$\int\frac{dz}{z^2+1} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x + c\Leftrightarrow z = \operatorname{tg}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x + c.$$

则原方程的解是:

$$y = (\alpha\sqrt{|\Delta|}/P)z + y_0$$

$$= -\frac{3}{2x^3} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2x^2}\left(\operatorname{tg}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x + c\right).$$

③当 $\Delta=0$,则 $L\left[\frac{-3}{2x^3}\right]=0$,可取 $\alpha=-1,\beta=0$,

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\gamma = 0, G = 1$,于是原方程的解是:

$$y = \frac{\alpha G}{P(x+c)} + y_0 = -\frac{1}{(x+c)x^2} - \frac{3}{2x^3}.$$

例 2[8] 解方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2 + x^2 y + \frac{x^6 - 2x^3 + (4\mu - \lambda^2)x^2 + 3}{4x^3}$.

记 $\Delta = \lambda^2 - 4\mu$,由于

$$y_0(x) = -\frac{P'(x)}{2P^2(x)} - \frac{Q(x)}{2P(x)} = -\frac{1}{2x^2} - \frac{x}{2},$$

$$\begin{aligned} L[y_0] &= L\left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{x}{2}\right] \\ &= -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{x^3}{2} + \left(\frac{x^3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{-\Delta}{4x} + \frac{3}{4x^3}\right) \\ &= \frac{-\Delta}{4x}. \end{aligned}$$

于是,得到:

$$I_1 = PL[y_0] = \frac{-\Delta}{4} = \alpha\gamma G^2,$$

$$I_2 = \frac{P'}{P} + Q + 2Py_0 = \frac{1}{x} + x^2 - \frac{1}{x} - x^2 = 0 = \frac{G'}{G} + \beta G.$$

按例 1 的方法,可以求得原方程的解.

可见,该方法求解 Riccati 方程(1),关键是求满足关系式(9)的非特解函数 y_0,使函数 $L[y_0]$ 满足关系式 $I_1 = PL[y_0] = \Delta$(Δ 为常数).

例 3[8] 研究如下方程:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2 + xy + \frac{x^4 + (4\mu - \lambda^2)x^2 + 3}{4x^3}$;

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x y^2 + \mathrm{e}^x y + \frac{\mathrm{e}^{2x} + (4\mu - \lambda^2) + 1}{4\mathrm{e}^x}$;

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2 + y\sin x + \frac{2x\sin x + (4\mu - \lambda^2) - (2\cos x - \sin^2 x)x^2 + 3}{4x^3}$;

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2\sin x + y\cos x + \frac{3\cos^2 x}{4\sin^3 x} + \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x + (4\mu - \lambda^2) + 2}{4\sin x} + \frac{1}{2}$.

在例 3 方程中,记 $\Delta = \lambda^2 - 4\mu$,由于

(1) $y_0(x) = -\frac{P'(x)}{2P^2(x)} - \frac{Q(x)}{2P(x)} = -\frac{1}{2x^2} - \frac{x}{2}$,

$$\begin{aligned} L[y_0] &= L\left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{x}{2}\right] \\ &= -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{x^3}{2} + \left(\frac{x^3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{-\Delta}{4x} + \frac{3}{4x^3}\right) \\ &= \frac{-\Delta}{4x}, \end{aligned}$$

$$I_1 = PL[y_0] = \frac{-\Delta}{4}.$$

(2) $y_0(x) = -\frac{P'(x)}{2P^2(x)} - \frac{Q(x)}{2P(x)} = -\frac{1}{2\mathrm{e}^x} - \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} L[y_0] &= L\left[-\frac{1}{2\mathrm{e}^x} - \frac{1}{2}\right] \\ &= -\frac{1}{2\mathrm{e}^x} + \frac{1}{4\mathrm{e}^x} + \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}^x}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^x}{2} + \left(\frac{\mathrm{e}^x}{4} + \frac{-\Delta}{4\mathrm{e}^x} + \frac{1}{4\mathrm{e}^x}\right) \\ &= \frac{-\Delta}{4\mathrm{e}^x}, \end{aligned}$$

$$I_1 = PL[y_0] = \frac{-\Delta}{4}.$$

(3) $y_0(x) = -\frac{P'(x)}{2P^2(x)} - \frac{Q(x)}{2P(x)} = -\frac{1}{2x^2} - \frac{\sin x}{2x}$,

$$\begin{aligned} L[y_0] &= L\left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{\sin x}{2x}\right] \\ &= -\frac{1}{x^3} + \frac{x\cos x - \sin x}{2x^2} + \frac{1}{4x^3} + \frac{\sin x}{2x^2} + \frac{\sin^2 x}{4x} - \frac{\sin x}{2x^2} - \frac{\sin^2 x}{2x} + \left(\frac{\sin x}{2x^2} + \frac{-\Delta}{4x^3} + \frac{-2\cos x + \sin^2 x}{4x} + \frac{3}{4x^3}\right) \\ &= \frac{-\Delta}{4x}, \end{aligned}$$

$$I_1 = PL[y_0] = \frac{-\Delta}{4}.$$

(4) $y_0(x) = -\frac{P'(x)}{2P^2(x)} - \frac{Q(x)}{2P(x)} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{\cos x}{2\sin x}$,

$$L[y_0] = L\left[-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{\cos x}{2\sin x}\right] = -\frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{2\sin^3 x} - \frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{4\sin^3 x} +$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{4\sin x}-\frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{2\sin x}+\frac{3\cos^2 x}{4\sin^3 x}+\frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{4\sin x}+\frac{-\Delta}{4\sin x}+\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{2}=\frac{-\Delta}{4\sin x},$$

$$I_1 = PL[y_0] = \frac{-\Delta}{4}.$$

例 4[15]　**求解微分方程:** $(2x+1)^2 y''-4(2x+1)y'+8y=0.$

解: 令 $y=e^u$**, 则有**

$$(2x+1)^2(u''e^u+u'^2e^u)-4(2x+1)u'e^u+8e^u=0,$$

$$(2x+1)^2u''+(2x+1)^2u'^2-4(2x+1)u'+8=0. \quad (18)$$

令 $u'=z$**, 则有**

$$(2x+1)^2z'+(2x+1)^2z^2-4(2x+1)z+8=0, \quad (19)$$

$$z'=-z^2+\frac{4}{2x+1}z-\frac{8}{(2x+1)^2}, \quad (20)$$

$$z_0(x)=-\frac{P'(x)}{2P^2(x)}-\frac{Q(x)}{2P(x)}=\frac{2}{2x+1},$$

$$L[z_0]=L\left[\frac{2}{2x+1}\right]=-\frac{4}{(2x+1)^2}+\frac{4}{(2x+1)^2}+\frac{8}{(2x+1)^2}-\frac{8}{(2x+1)^2}=0.$$

$I_1 = PL[z_0] = 0$**, 可取** $\alpha=-1, \beta=0, \gamma=0, G=1$**, 则方程(20) 的解是:**

$$z=\left(\frac{-1}{P(x+c)}\right)+z_0=\frac{1}{x+c}+\frac{2}{2x+1}.$$

于是, 原方程的解为 $y=e^u=e^{\int z\mathrm{d}x+c}=e^{\int\left(\frac{1}{x+c_1}+\frac{2}{2x+1}\right)\mathrm{d}x+c_2}=(c_1+c_2x)|2x+1|.$

4　结束语

综上, 对于 Riccati 方程(1) 的求解, 仍然是具有吸引力的学术问题, 寻求非特解(或特解) 函数 y_0**, 使构成的函数** $PL[y_0]$ **为常数的求解, 是一条可行的路径.**

参 考 文 献

[1] 刘玉堂, 辛祥鹏. 二次 Riccati 方程研究综述[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2017, 30(3): 21-25.

[2] 赵临龙. 常微分方程研究新论[M]. 西安: 西安地图出版社, 2000.

[3] 张玮玮. 一类特殊类型的 Riccati 方程的求解[J]. 安庆师范学院学报(自然科学版), 2015, 21(2): 110-111.

[4] 段锋, 赵临龙. 一个 Riccati 方程可积性结论的推广[J]. 西安文理学院学报(自然科学版), 2015, 18(4): 31-34.

[5] 段锋, 赵临龙. Riccati 方程的几个新的性质及其应用[J]. 中央民族大学学报(自然科学版), 2015, 24(4): 21-26.

[6] 何雨蔚. Riccati 微分方程解的探讨[J]. 攀枝花学院学报, 2015, 32(4): 66-69.

[7] 段峰. Riccati 方程的初等变换及其应用[J]. 内江科技, 2015, 36(8): 63-64.

[8] 魏帅帅, 李凯辉, 刘汉泽. G'/G 展开法在 Riccati 方程中的应用[J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2015, 36(5): 92-97.

[9] 段峰. 几类可积的 Riccati 方程解的性质[J]. 中央民族大学学报(自然科学版), 2016, 25(1): 27-31.

[10] 倪华, 倪苏浩, 杨双成. 变量代换法和几类里卡提方程的通解[J]. 高等数学研究, 2016, 19(3): 17-22.

[11] 凌云, 李满枝. 一类 Riccati 方程解的性质[J]. 海南热带海洋学院学报, 2017, 24(2): 43-46.

[12] 王明建, 王愉博. 有关 Riccati 微分方程通解的几个结论[J]. 西安文理学院学报(自然科学版), 2018, 21(1): 20-22+29.

[13] 赵临龙. Riccati 微分方程一个新的可积条件[J]. 科学通报, 1998, 43(1): 107-109.

[14] 赵临龙. 关于 Riccati 方程的可积条件研究的再讨论[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2006(5): 713-715.

[15] 李必文, 赵临龙, 张明波. 常微分方程[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 2014.

(下转第 40 页)

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

H_2O_2 over formed Ti-MWW catalyst [J]. J Catal, 2016, 342: 173 - 183.

[17] CHEN X Y, CHEN S L, JIA A P, et al. Gas phase propylene epoxidation over Au supported on titanosilicates with different Ti chemical environments [J]. Appl Surf Sci, 2017, 393: 11 - 22.

Preparation and Characterization of Layered Titanosilicate

ZHAO Dazhou

(School of Chemistry & Chemical Engineering, Shaanxi Xueqian Normal University, Xi'an Shaanxi 710100)

Abstract: Layered titanium silicate (LTS) was synthesized by sol-gel method using four titanium chloride as titanium source and silica as silicon source under alkaline conditions. The structure of the samples was characterized by X-ray diffraction, infrared spectroscopy, thermogravimetry and transmission electron microscopy. The LTS sample had an ordered layered structure with a spacing of about 5 nm. In alkaline condition, the analysis and characterization of LTS showed that LTS had highly ordered lamellar structure, which provided conditions for introducing guest molecules into the interlayer.

Keywords: sol-gel method; layered; titanium silicate; stability

(上接第 15 页)

Further Study on the Invariant Solution of Quadratic Riccati Equation

ZHAO Linlong

(School of Mathematics and Statistics, Ankang University, Ankang Shaanxi 725000)

Abstract: Based on the invariant relation of Riccati equation $L[y] = 0$, this paper gives a method to determine the invariant relation satisfied by nonspecific solution function y_0 ($L[y_0] \neq 0$), and illustrates the practicability of this method by an example.

Keywords: Riccati equation; exact solution; nonspecial solution function; application example

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net