DOI:10.19789/j.1004-9398.2015.06.004

问题牵引式教学法在“方向导数”教学中的应用*

景慧丽 赵伟舟 王惠珍 杨宝珍
(第二炮兵工程大学理学院,陕西 西安 710025)

摘 要

问题牵引式教学法是以问题为牵引组织教学,这种教学法可打破常规教学的沉闷气氛,激发学员的学习兴趣,有利于培养学员独立学习、批判性和创新性思维能力,让学员在解决问题中实现自我提高. 在《高等数学》课程中,如果教员能有效地运用问题牵引式教学法,将会增加学员学习的积极性和主动性. 本文结合自己的教学实践,以“方向导数”的教学为例探讨了问题牵引式教学法.

关键词: 高等数学,方向导数,问题牵引式教学法.
中图分类号:

“方向导数”这一部分内容是《高等数学》课程中的重点内容之一,传统讲法是直接给出方向导数的概念,然后分析方向导数和偏导数的关系,最后直接给出方向导数存在定理. 结果往往是学员学完本节内容后,对方向导数的实质是什么搞不明白,对函数在一点的偏导数存在性、沿任意方向的方向导数存在性及可微性之间的关系弄不清楚(这是本节内容的重点和难点). 为了突出重点、化解难点,结合自己多年的教学实践,就“方向导数”采用了问题牵引式教学法授课,教学效果良好,既让学员理解和掌握了新知识,还增加了学员学习的兴趣,培养了学员的创新思维能力.

1 问题牵引式教学法的内涵

问题牵引式教学法是基于前苏联教育家马赫穆托夫提出的“问题教学法”演变而来的. 马赫穆托夫反对只注重知识传授的教学,要求引进科学实践的方式,把解决课题或问题作为教学的基本过程. 他提出可以采用教员带领学员解决课题,教员和学员共同解决问题和学员独立探索解决问题的不同方式,使教学成为有明确目的、能发挥学员主观能动性的过程.

问题牵引式教学法就是以“问题”牵引、为主线组织教学,即以问题为中心,学员为主体,教员为主导,在教学中教员把教学内容设计成一系列问题,围绕知识点,层层设问,并指导和启发学员围绕“问题”积极思考,在一种问题氛围中促使学员掌握要点、难点、注意事项,从而达到学习知识和启迪思维的目的[1].

2 《高等数学》课程引入问题牵引式教学法的必要性

《高等数学》作为我校各工科专业学员必修的一门基础课程,其目标是培养学员的抽象思维能力、逻辑推理能力和自学能力,还要特别培养学员综合运用所学知识去分析、解决问题的能力. 可是,我校约90%的学员深受“传递-接受式”的教学方法的影响,养成了思维的惰性,只愿听教员讲,疏于动脑思考,认为“上学就是跟教员学,教员教什么,我就学什么,学会就行”. 长期以来,学员在整个教学过程中处于被动接受的状态,学员的主动性、创造性难以激活,学员学习兴趣不高,教学效率偏低,教员也无法全面了解和掌握学员学习心理全过程.

作为学习的主体,青年学员正处于世界观、人生观、价值观的形成时期,思维活跃,好奇心强,喜欢发现问题,追根溯源,更喜欢在问题情境中有更多的参与和展示自己的机会[2]. 因此,在《高等数学》课程教学上,教员应鼓励学员积极参与教学活动,既要思

收稿日期: 2014-10-21
* 第二炮兵工程大学2014年度教育教学研究立项课题(EPGC2014023)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

维参与,又要行为参与,那么,问题牵引式教学法就是达到这一目标的好方法.

我们知道学习并非是一种个体被动的吸收过程,而是一个以已有的知识和经验为基础的主动建构过程,是能动地建构新的认识图式,不断完整新认知结构的过程. 问题牵引式教学法通过调动师生积极开展双向交流,可打破常规教学的沉闷气氛,从而激发学员的学习兴趣,变被动学习为主动学习,有利于培养学员独立学习、批判性和创新性思维能力,让学员在解决问题中实现自我提高.

3 《高等数学》课程应用问题牵引式教学法的课堂教学过程设计

问题牵引式教学法的课堂教学过程包括: 创设情景、引出问题→分析问题→解决问题(即得出结论)与提出新问题(即留有疑问),学员思维处于螺旋上升状态[5]. 具体教学过程如图 1 所示.

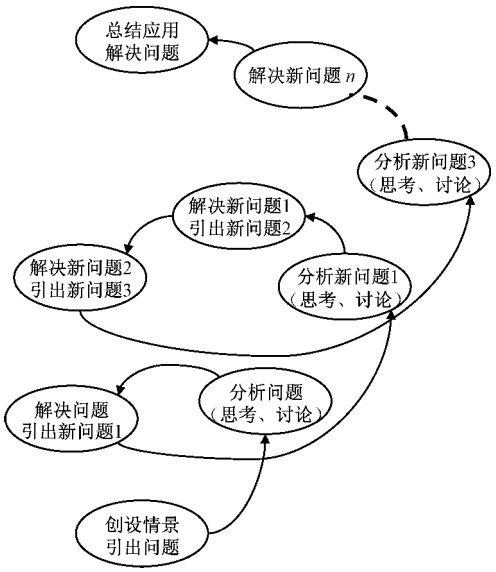


图 1 问题牵引式教学法教学过程示意图

4 问题牵引式教学法在“方向导数”中的具体实施过程

首先是创设情景,引出问题. 问题牵引式教学法的关键是教员要创设合适的问题情景. 实践证明,合适的问题情景能使学员的求知欲高涨,能充分调动学员的探索欲望和主观能动性.

本节课是通过房屋屋顶雨水的流动引入方向导数的概念,即首先在 PPT 上出现国家大剧院在雨中的美景,当学员们兴致勃勃地欣赏这幅美景时,教员提出问题: 国家大剧院屋顶上的雨水是如何流下来的? 让学员观察、思考、讨论后,教员告诉学员要解决这个问题,必须把问题量化,建立简单的数学模型,由此引出引例.

引例[4] 设一房屋的顶部是半椭球面,其方程为 $z=4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}$,当无风的天气下,求下雨时过房顶上点 $P(1,3,\sqrt{11})$ 处的雨水流下的路线方程(不计摩擦).

教员分析引例,提出问题: 雨水是沿什么方向流下的? 让学员讨论后给出结论. 学员的回答是: 雨水沿着最容易流、最好流、流的最快的方向流下来. 此时教员既要鼓励学员的回答是正确的,还要强调学员的回答全是“口语”,需要用“数学语言”来表述,即雨水是沿着函数 z 下降最快的方向流下来. 教员继续解释下降最快的方向就是减小最快的方向. 紧接着教员提出问题: 如何描述函数在一点沿着某个方向变化的快慢呢? 教员启发学员思考并提出问题: 变化的快慢就是变化率问题,如何描述变化率呢? 学员的回答是: 导数和偏导数. 教员引导学员回忆导数和偏导数的实质,然后进行解释: 用方向导数来刻化函数沿着某个方向变化的快慢. 这样就引出了方向导数的概念,既避免了直接给出方向导数概念的抽象性,还为学员理解方向导数的实质、掌握方向导数的应用奠定了基础.

定义[5] 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)\subset R^2$ 内有定义,$\vec{l}$ 为从点 P_0 出发的射线(方向角为 α,β),$P(x,y)$ 为 $\vec{l}$ 上且含于 $U(P_0)$ 的任一点,以 ρ 表示 P 与 P_0 两点间的距离. 若极限

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数,记作 $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)}$.

教员继续分析方向导数的概念及实质,然后提出问题: 方向导数和偏导数均是反映的变化率问题,那么它们之间是否存在着某种关系呢? 学员的回答是: 可能有,也可能没有. 此时教员给出解释,并提出问题: 当方向 $\vec{l}$ 分别取为 x 轴的正向和负向时,函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数是什么? 让学员思考后写出自己的结果,然后教员让学员相互点评他们的结果,最后教员给出评价. 这个让学员参与的过程,既让学员掌握了知识,还活跃了课堂气

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

氛,增加了学员学习数学的兴趣. 此时教员继续提出问题: 如果函数在该点的偏导数存在,情形又如何? 让学员思考、讨论后给出结论,教员进行总结: 如果函数在一点的偏导数存在,则函数在该点沿坐标轴方向的方向导数均是存在的.

及时进行总结是教学的一个重要环节,也是学员学习的一个重要方法,通过总结可以使所获得的知识条理化、系统化.

教员引导学员回忆引例,然后提出问题: 雨水是沿着函数 z 下降最快的方向流下来的,那么这个下降最快的方向一定是坐标轴方向吗? 学员回答: 不一定. 教员进行分析并提出问题: 我们知道偏导数存在能保证沿坐标轴方向的方向导数均存在,那么偏导数存在能保证沿任意方向的方向导数均存在吗? 让学员思考、讨论后给出答案,学员的回答是: 能、不一定、一定能. 此时教员给出正确答案,并给出具体的例子加以解释.

例 1[6]　讨论函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0,\\ x+y, & xy=0,\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的偏导数的存在性及沿任意方向的方向导数的存在性.

解　$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x-0}{\Delta x}=1=f_y(0,0)$

当方向 $\vec{l}$ 满足 $xy\neq 0$ 时,由于

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\cos\beta)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{1-0}{\rho}$$

极限不存在,因此方向导数存在.

到此教员引导学员进行总结: 偏导数存在只能保证沿坐标轴方向的方向导数存在,沿任意方向的方向导数不一定存在. 此时教员追问: 那么函数满足什么条件才能保证沿任意方向的方向导数均存在呢? 教员引导学员进行分析并提出问题: 能否给偏导数存在加强条件,使其保证沿任意方向的方向导数均存在? 让学员思考后给出答案,学员的回答是: 应该可以吧. 此时教员追问: 加强什么条件呢? 学员回答: 加强到可微、加强到偏导数连续. 教员给出解释并带领学员从理论上进行分析,在分析的过程也可以提出问题,如函数在一点可微是什么意思? 如何用数学语言来表述? 这里的 Δx、Δy 是什么等等,既让学员巩固了旧知识还培养了学员数学表达能力.

分析　因为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处可微,所以

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)\end{aligned}$$

设方向 $\vec{l}$ 是任意方向,则

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)}&=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\rho}\\&=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f_x(x_0,y_0)\rho\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\rho\cos\beta+o(\rho)}{\rho}\\&=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta\end{aligned}$$

得到等式后,教员引导学员进行总结,并以定理的形式给出上述结论.

定理[7]　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分,则函数在该点沿任意方向 $\vec{l}$ 的方向导数都存在,且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是方向 $\vec{l}$ 的方向余弦.

教员继续分析定理,强调可微是函数沿任意方向的方向导数存在的充分条件,并提出问题: 可微是函数在一点沿任意方向的方向导数存在的必要条件吗? 让学员讨论、思考后给出答案,学员的回答是: 可能是、不是. 教员给出结论,并通过例子加以解释. 这个例子教员可以通过启发学员,让学员自己构造出来.

例 2　讨论函数 $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点沿任意方向的方向导数的存在性及可微性.

解　设方向 $\vec{l}$ 是任意方向,则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\cos\beta)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\sqrt{\rho^2}}{\rho}=1$$

即函数在 $(0,0)$ 点沿任意方向的方向导数均是存在的.

因为

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

即极限不存在,所以偏导数不存在,因此函数在(0,

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

0)点不可微.

由此教员引导学员进行总结:可微是函数在一点沿任意方向的方向导数存在的一个充分非必要条件.教员继续提出问题:由例 2 还能得到什么结论呢?让学员观察、讨论、思考后给出答案,教员加以肯定:函数在一点沿任意方向的方向导数均存在,也不能保证偏导数存在.此时教员让学员总结函数在一点沿任意方向的方向导数的存在性、偏导数的存在性及可微性之间的关系,便于学员理解和记忆,教员可以让学员建立它们之间的比较表。

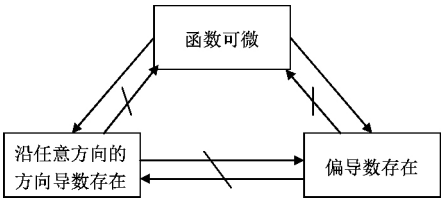


图 2 几个概念间的关系

教员继续引导学员回忆引例,然后提出问题:函数在一点沿什么方向的方向导数最小?让学员观察、讨论、思考后给出答案,学员的回答是:依据计算公式,利用和差化积公式,即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$
$$= A\sin(\alpha+\varphi)$$

当 α、φ 满足 $\sin(\alpha+\varphi) = -1$ 时,方向导数最小.

教员要尊重学员的想法,既要鼓励学员方法是可行的,同时又提出问题:如果点 $P_0(x_0,y_0)$ 不是某一定点,而是任意一点 $P(x,y)$,上述方法还可行吗?学员回答:不可行.此时教员追问:那怎么办?让学员讨论后,教员给出分析:

分析 令 $\vec{G} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$,$\vec{l}^0 = (\cos\alpha,\cos\beta)$,则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$
$$= \vec{G}\cdot\vec{l}^0 = |\vec{G}|\cos\theta$$

其中 θ 是向量 $\vec{G}$ 与 $\vec{l}^0$ 的夹角.即函数在一点处沿与向量 $\vec{G}$ 反方向的方向导数最小,且最小值就是向量 $\vec{G}$ 的模的相反数.

此时教员告诉学员,由此就可以解决雨水流下路线问题了.教员带领学员解决引例,求得雨水流下路线方程是 $\begin{cases} z = 4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}. \\ y = 3x^{\frac{4}{9}} \end{cases}$

为了使学员更直观的观察雨水流下路线,我们又借助数学软件 Matlab 画出了雨水流下路线.通过增加这一教学环节,使得数学教学变得更加生动有趣,还能培养学员几何直观能力及结合计算机解决问题的能力.

到此,本节内容基本结束,在本课堂的结尾,我们并未沿袭传统的教学模式——简单总结课堂内容,而是在总结内容的基础上,提出新的问题:如何对 $n(n\geqslant 3)$ 元函数定义方向导数?二元函数方向导数的存在性能否推广到 $n(n\geqslant 3)$ 元函数?函数在一点沿什么方向的方向"导数"最大?函数在一点沿什么方向几乎不变?通过这些问题达到将教学内容延伸的目的,以便培养学员自主学习和钻研的习惯和能力.

教学中,我们既借助了多媒体教学的优势,又不拼弃板书教学,最后留在黑板的是穿起本节内容的一条问题线,即所谓的问题牵引线,板书提纲见图 3.

一、引入

问题:雨水沿什么方向流下?

函数z下降最快的方向

问题:如何描述函数在一点沿着某个方向变化的快慢呢?

二、方向导数的概念

问题:函数满足什么条件才能保证沿任意方向的方向导数均存在?

三、方向导数存在的条件

可微

问题:沿什么方向的方向导数最小?

沿向量$\vec{G}$的反方向

图 3 方向导数板书提纲

5 使用问题牵引式教学法应注意的几个问题

5.1 选好"问题"是关键

在问题牵引式教学法中问题的设置非常重要,如果教员能在课堂上巧妙地提出有思考价值的问题,就好比一把金钥匙,开启了学员的智慧大门,一颗火种,点燃了学员的活跃思维.要设计恰如其分的问题需要注意三点:一是问题的难易程度要适中,即要恰好落在学员认知的最近发展区;二是问题要体现出教材的重点、难点、疑点和关键点以及知识形成的框架;三是问题的提出要科学、正确、清楚,不能含糊其辞、模棱两可.总之,教员提出的问题既要符合学员的认知规律和能力,由易到难呈现给学员,又要

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

遵循有关的认知理论,理清知识之间的内在关系,循序渐进地展示给学员[2].

5.2　教员要给学员创造“机会”

平等、民主的师生关系是实施问题牵引式教学法的前提,教员必须以学员为本,通过营造一种积极、和谐、愉快、活泼的教学氛围,消除学员的紧张感、拘束感和戒备心理,注重用问题来引导学员,使其始终处于“若有所思”的状态,做到学、疑、思相结合,从而调动学员探究问题的积极性,真正实现学员的知识建构. 在实施中,教员要专心倾听学员对问题的分析看法,当学员疑虑时,要以信任的眼神鼓励学员说下去,切忌漫不经心,影响学员的热情.

6　结　语

德国教育家第斯多惠说: 教员的艺术不再于传授本领,而在于激励、唤醒、鼓舞[2]. 问题牵引式教学法正是这一思想的完美体现. 由于问题牵引式教学法以问题为中心,课堂出现的是一个又一个要解决的问题,教员引导学员进行探索,教员的角色由单纯的施教者转变为教学活动的组织者、指导者、参与者; 每个学员都能参与解决问题的全过程,学员的角色由被动听讲、被动接受者转变为积极参与、合作交流的主体者,最后使学员获得了与所给问题的相关知识,既加深了对知识的理解和掌握,又极大地增加了学员学习数学的积极性和主动性. 但问题牵引式教学法不是万能的,不是所有的课程、所有的内容都可以运用问题牵引式教学法,只有用得恰当到位,才能最大化地发挥积极作用.

参　考　文　献

[1] 蒋新宇,施树云,等. 问题式教学法在有机化学实验教学中的应用[J]. 光谱实验室,2012,29(4):2548 - 2550.

[2] 李莎澜,朱四如,等. 问题教学法在军校数学教学中的应用实践[J]. 空军雷达学院学报,2012,26(1):65 - 67.

[3] 王红明,姚磊,等. 基于问题式教学法的作战模拟课程课堂设计[J]. 空军雷达学院学报,2011,25(1):64 - 65.

[4] 吴忠祥. 工科数学分析基础教学辅导书(下)[M]. 第一版. 北京: 高等教育出版社, 2007: 100.

[5] 华东师范大学数学系. 数学分析(下)[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2002: 124.

[6] 张珺. 浅谈方向导数教学中的若干问题[J]. 太原大学教育学院学报,2009,27(增刊):64 - 65.

[7] 同济大学应用数学系. 高等数学(下)[M]. 第六版. 北京: 高等教育出版社,2007: 102.

Applications of Problem-Leading Teaching Method in Directional Derivative

Jing Huili　Zhao Weizhou　Wang Huizhen　Yang Baozhen

(School of Natural Science, The Second Artillery Engineering Institute, Xi'an　710025)

Abstract

The problem-leading teaching method can break the monotony, stir up the interest, and very useful in training the students' independence. Furthermore, the method can develop the students' critical and innovation thinking ability. In the teaching, if teachers can use the method effectively will increase the students' enthusiasm and initiative. In this paper, combined own teaching practice, explained the method in the directional derivative teaching.

Key words: higher mathematics, directional derivative, problem-leading teaching method.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net