DOI：10.19789/j.1004-9398.2022.04.001
文献引用：刘颖，谢伟松，何振鹏．移动边界域上一类退化波动方程的高精度格式[J]．首都师范大学学报（自然科学版），2022，43（4）：1-7. LIU Y，XIE W S，HE Z P. High order scheme for a class of degenerate wave equations in moving boundary domain[J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2022，43（4）：1-7.

移动边界域上一类退化波动方程的高精度格式*

刘　颖[1]，谢伟松[1**]，何振鹏[2]

（1. 天津大学数学学院，天津　300354；2. 中国民航大学航空工程学院，天津　300300）

摘要：为了研究移动边界域上一类退化波动方程的高精度数值计算格式，本文采用有限差分法对其进行数值模拟．对时间方向采用二阶中心差分格式进行数值离散，对空间方向分别采用二阶中心差分格式、基于待定系数法的四阶差分格式进行数值离散．利用Taylor展开式对首个时间层及固定边界处的数值计算过程进行特殊处理：当空间方向的数值离散格式采用二阶中心差分格式时，对移动边界处采用三角形网格以及相应的数值离散格式进行求解；当空间方向的数值离散格式采用四阶差分格式时，对移动边界处采用相应的数值离散形式进行求解．数值实验结果验证了这2种数值求解格式在解决此类问题时的有效性，且空间四阶精度差分格式比空间二阶精度差分格式的解具有更高的精确性．

关键词：移动边界域；退化波动方程；有限差分法
中图分类号：O241.82

High order scheme for a class of degenerate wave equations in moving boundary domain*

LIU Ying[1]，XIE Weisong[1**]，HE Zhenpeng[2]

（1. School of Mathematics，Tianjin University，Tianjin　300354；2. School of Aeronautical Engineering，Civil Aviation University of China，Tianjin　300300）

Abstract：For a class of degenerate wave equation model in the moving boundary domain，the finite difference method is used to discretize it. The second-order central difference formula is used for the numerical discretization form in the time direction，the second-order central difference formula and the fourth-order difference scheme obtained by the undetermined coefficient method are used for the numerical discretization scheme in the space direction. The Taylor expansion formula is used to give the numerical calculation process at the first time layer and the fixed boundary. If the numerical discretization form in the spatial direction is the second-order central difference formula，the triangular grid and the corresponding numerical discretization form are used to deal with the moving boundary. If the numerical discretization scheme in the spatial direction is the fourth-order difference formula，the corresponding numerical discretization scheme are used to deal with the moving boundary. The numerical experimental results verify the effectiveness of the two numerical schemes in solving such

收稿日期：2021-09-06
* 天津市专项科研基金项目（20YDTPJC01720）
** 通信作者：weis_xie@tju.edu.cn

problems, and the spatial fourth-order accuracy difference scheme is more accurate than the spatial second-order accuracy difference scheme.

Keywords: moving boundary domain; degenerate wave equation; finite difference method

CLC: O241.82

0 引 言

现代科学、技术和工程中的大量问题的数学模型都可以用偏微分方程来表示,大多数自然科学问题的基本方程本身就是偏微分方程.但是,绝大多数偏微分方程定解问题的解不能以实用的解析形式来表示.如果方程的形式复杂,或者求解区域的形状复杂,其解析解就更难以得到.这就需要寻找偏微分方程定解问题的近似解,也就是数值解.

随着计算机技术的飞速发展,微分方程的数值解法得到了前所未有的发展和应用.有限差分法是求解偏微分方程定解问题的主要数值方法之一[1-3],此方法已经有了比较成熟的算法格式和软件,并能对其进行比较完善的理论分析.目前,利用有限差分法求解双曲型方程的研究成果比较丰富.Boujaoui等[4]研究了一维波动方程边界反馈问题的有限差分离散方法,并证明了解的能量是呈指数衰减的;Boujaoui[5]研究了具有内阻尼的一维波动方程的有限差分全离散形式,并利用可观测不等式证明了阻尼系统能量的衰减率一致依赖于网格长度;Wang等[6]采用有限差分法对时变偏微分方程尤其是二阶波动方程进行数值求解,采用具有守恒性质的有限差分算子对内点进行数值离散,同时采用相关的离散方法对边界和网格界面条件进行处理,得到了精度较高的数值实验结果.现有文献多数都是在非移动边界域[4-20],也就是固定区域上进行的研究.针对移动边界域上的研究相对较少,本文研究内容相对于在非移动边界域上的研究难度加大,是实际工程问题中的一个难题.本文将采用有限差分方法在移动边界域上对一类退化波动方程的数值解法进行研究,并给出2种数值求解该类方程的差分格式.这2种差分格式对时间的离散均采用二阶中心差分格式,对空间的离散分别采用二阶差分和四阶差分格式,其截断误差分别为$O(\tau^2+h^2)$和$O(\tau^2+h^4)$.同时进行相应的数值模拟,给出具有一定精度的数值实验结果.

1 问题陈述

本文主要利用有限差分法研究移动边界域上一类退化波动方程的数值解法,考虑下述非齐次初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)-(x^p u_x(x,t))_x=f(x,t), \\ (x,t)\in(0,l_k(t))\times(0,T), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(0,t)=\alpha(t), \\ u(l_k(t),t)=\beta(t), t\in(0,T), \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x), \\ u_t(x,0)=\psi(x), x\in(0,1), \end{cases} \tag{3}$$

式中:x^p为非线性系数;$0<p<1$,$l_k(t)=1+kt$,$0<k<1$;$f(x,t)$、$\alpha(t)$、$\beta(t)$、$\varphi(x)$、$\psi(x)$为已知函数;$u(x,0)=\varphi(x)$、$u_t(x,0)=\psi(x)$为初值条件,$u(0,t)=\alpha(t)$、$u(l_k(t),t)=\beta(t)$为边值条件.该方程主要描述了具有一个固定端点和一个移动端点的弦的运动轨迹.其中$x=l_k(t)=1+kt$是移动端点,常数k是端点移动的速度.

2 差分格式

为了使用有限差分法求解问题(1)~(3),将求解区域

$$Q_T^k=\{(x,t)\,|\,0\leqslant x\leqslant l_k(t),\ 0<t\leqslant T\}$$

进行剖分.取正整数m和n,并记

$$x_i=ih,\ 0\leqslant i\leqslant n+nkT,\ t_j=j\tau,\ 0\leqslant j\leqslant mknT,$$

式中$h=\frac{1}{n}$,$\tau=\frac{1}{mkn}$分别称h和τ为空间步长和时间步长,即

$$x_i=\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,1,1+\frac{1}{n},1+\frac{2}{n},\cdots,1+\frac{nkT}{n},\quad 0\leqslant i\leqslant n+nkT,$$

$$t_j=\frac{1}{mkn},\frac{2}{mkn},\cdots,\frac{mknT}{mkn},\qquad 0\leqslant j\leqslant mknT.$$

用两簇平行直线

$$x_i=ih,\ 0\leqslant i\leqslant n+nkT,$$

$$t_j=j\tau,\ 0\leqslant j\leqslant mknT,$$

将Q_T^k内部分割成矩形网格,边界分割成三角形网格(图1).记$\Omega_h=\left\{x_i\,\middle|\,0\leqslant i\leqslant n+nkT\right\}$,$\Omega_\tau=$

$\left\{t_j \middle| 0 \leqslant j \leqslant mknT\right\}$, $\Omega_{th} = \Omega_\tau \times \Omega_h$. 称 (x_i, t_j) 为节点，称在 $t = 0, x = 0$ 以及 $x = l_k(t)$ 上的节点为边界点，其他所有节点为内点，称在直线 $t = t_j$ 上的所有节点 $\left\{(x_i, t_j) \middle| 0 \leqslant i \leqslant n + \frac{j}{m}\right\}$ 为第 j 层节点.

注：$t = t_j$ 每一层上节点数目不同，最上层 $t = T$ 上节点数是 $0 \leqslant i \leqslant n + nkT$，其他层最右端边界节点在直线 $x = l_k(t) = 1 + kt$ 上，不一定落在矩形网格上，对于边界节点进行如下编号：

$t = t_j$ 层最右端边界点 x 的坐标为 $x_r^j = 1 + kt_j$，因为

$$\frac{1 + kt_j}{h} = \frac{1 + kj\tau}{1/n} = \frac{1 + kj/(mkn)}{1/n} = n + \frac{j}{m}.$$

①如果 $n + \frac{j}{m}$ 是整数，则该边界点落在矩形网格上，该边界点编号即为 $n + \frac{j}{m}$；

②如果 $n + \frac{j}{m}$ 不是整数，该层的最右端的内点编号应该取 $n + \frac{j}{m}$ 的最大整数部分，记作 $n + [\frac{j}{m}]$，该边界点记作 $n + [\frac{j}{m}] + 1$.

本文后面涉及到第 j 层节点都以此为标准.

定义 Ω_{th} 上的网格函数

$$U = \left\{U_i^j \middle| 0 \leqslant i \leqslant n + \frac{j}{m}, 0 \leqslant j \leqslant mknT\right\},$$

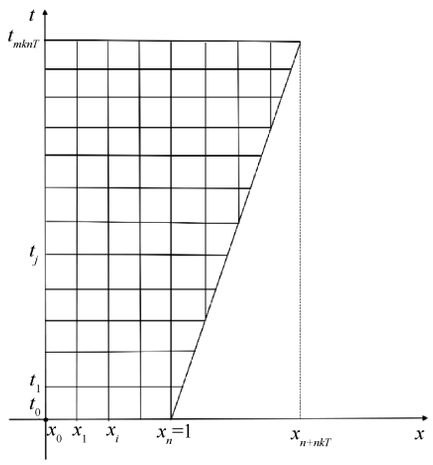


图1　网格剖分

式中

$$U_i^j = u(x_i, t_j),\ 0 \leqslant i \leqslant n + \frac{j}{m}, 0 \leqslant j \leqslant mknT.$$

2.1　二阶精度差分格式

在内部矩形网格节点处考虑方程(1)，有

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left((x^p)_i \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x}\right) = f(x_i, t_j),\quad 1 \leqslant i \leqslant n + \frac{j}{m} - 1, 1 \leqslant j \leqslant mknT - 1. \tag{4}$$

将

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} = \frac{u(x_i, t_{j-1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j+1})}{\tau^2} + O(\tau^2)$$

和

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((x^p)_i \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x}\right) = \frac{(x^p)_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial u(x_{i+\frac{1}{2}}, t_j)}{\partial x} - (x^p)_{i-\frac{1}{2}} \frac{\partial u(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j)}{\partial x}}{h} + O(h^2) =$$

$$\frac{(x^p)_{i+\frac{1}{2}} \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} - (x^p)_{i-\frac{1}{2}} \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h}}{h} + O(h^2) =$$

$$\frac{(x^p)_{i+\frac{1}{2}} u(x_{i+1}, t_j) - [(x^p)_{i+\frac{1}{2}} + (x^p)_{i-\frac{1}{2}}] u(x_i, t_j) + (x^p)_{i-\frac{1}{2}} u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} + O(h^2)$$

代入(4)并忽略高阶无穷小量 $O(\tau^2 + h^2)$，得到

$$\frac{1}{\tau^2}[u(x_i, t_{j-1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j+1})] - \frac{1}{h^2}[(x^p)_{i+\frac{1}{2}} u(x_{i+1}, t_j) - [(x^p)_{i+\frac{1}{2}} + (x^p)_{i-\frac{1}{2}}] u(x_i, t_j) + (x^p)_{i-\frac{1}{2}} u(x_{i-1}, t_j)] = f(x_i, t_j),$$

$$1 \leqslant i \leqslant n + \frac{j}{m} - 1, 1 \leqslant j \leqslant mknT - 1.$$

由初值条件(3)，有

$$U_i^0 = \varphi(x_i), 1 \leqslant i \leqslant n + \frac{j}{m} - 1.$$

由方程(1)，可知

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_0)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x^p)_i \frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial x}\right) + f(x_i, t_0) = (x_i^p \varphi_i'(x))' + f(x_i, t_0).$$

根据带积分余项的Taylor展开式以及式(3)，可得

$$U_i^1 = u(x_i, t_0) + \tau\frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau^2\frac{\partial^2 u(x_i, t_0)}{\partial t^2} + R_{i1} =$$
$$\varphi(x_i) + \tau\psi(x_i) +$$
$$\frac{1}{2}\tau^2[((x^p)_i\varphi'(x_i))' + f(x_i, 0)] + R_{i1},$$
$$1 \leqslant i \leqslant n + \frac{j}{m} - 1. \tag{5}$$

式中 $R_{i1} = \frac{1}{2}\int_0^\tau(\tau - t)^2\frac{\partial^3 u(x_i, t)}{\partial t^3}\mathrm{d}t$ 为余项.由边界条件(2),有

$$U_0^j = \alpha(t_j),\ U^j_{n+\frac{j}{m}} = \beta(t_j), 0 \leqslant j \leqslant mknT.$$

在式(5)中略去余项 R_{ij}, 用 u_i^j 代替 $u(x_i, t_j)$, 可对问题(1)~(3)建立如下差分格式:

$$\begin{cases}
\frac{1}{\tau^2}[u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}] - \frac{1}{h^2}\{(x^p)_{i+\frac{1}{2}}u^j_{i+1} \\
-[(x^p)_{i+\frac{1}{2}} + (x^p)_{i-\frac{1}{2}}]u_i^j + (x^p)_{i-\frac{1}{2}}u^j_{i-1}\} = \\
f(x_i, t_j),\ 1 \leqslant i \leqslant n + \frac{j}{m} - 1, 1 \leqslant j \leqslant mknT, & (6)\\
u_i^0 = \varphi(x_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n + \frac{j}{m} - 1, & (7)\\
u_i^1 = \varphi(x_i) + \tau\psi(x_i) + \frac{1}{2}\tau^2[((x^p)_i\varphi'(x_i))' + \\
f(x_i, 0)],\ 1 \leqslant i \leqslant n + \frac{j}{m} - 1, & (8)\\
u_0^j = \alpha(t_j),\ u^j_{n+\frac{j}{m}} = \beta(t_j),\ 0 \leqslant j \leqslant mknT. & (9)
\end{cases}$$

注:可用

$$u_i^1 = \varphi(x_i) + \tau\psi(x_i) +$$
$$\frac{1}{2}\tau^2\left[\frac{(x^p)_{i+\frac{1}{2}}\varphi'(x_{i+\frac{1}{2}}) - (x^p)_{i-\frac{1}{2}}\varphi'(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} + f(x_i, t_0)\right] =$$
$$\varphi(x_i) + \tau\psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2h}\left[(x^p)_{i+\frac{1}{2}}\frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{h} -\right.$$
$$\left.(x^p)_{i-\frac{1}{2}}\frac{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})}{h} + f(x_i, t_0)\right] =$$
$$\varphi(x_i) + \tau\psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2h^2}\left[(x^p)_{i+\frac{1}{2}}\varphi(x_{i+1}) -\right.$$
$$\left.((x^p)_{i+\frac{1}{2}} + (x^p)_{i-\frac{1}{2}})\varphi(x_i) + (x^p)_{i-\frac{1}{2}}\varphi(x_{i-1})\right] +$$
$$\frac{\tau^2}{2}f(x_i, t_0), \quad 1 \leqslant i \leqslant n + \frac{j}{m} - 1.$$

代替(8).

在边界 $x = l_k(t)$ 上的非矩形网格处采用非等距差分格式(图2).如果边界点左侧的节点记作 (i, j), 右侧节点记作 $(i+1, j)$, 点 $(i+1, j)$ 实际不在求解域上.因为边界右侧节点不在求解域上,对于求解域外矩形网格点不编号,将边界点编号记作 $(i+1, j)$.

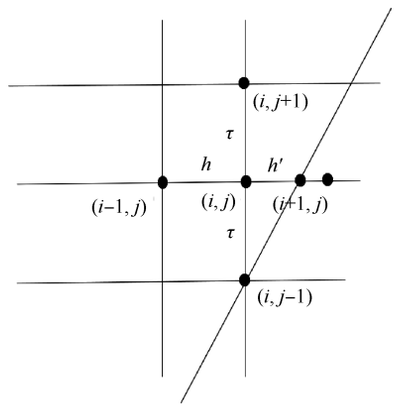


图2 非等距差分格式

忽略高阶无穷小量 $O(\tau^2 + h^2)$,得到方程(1)的差分格式:

$$\frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{\tau^2} -$$
$$\frac{(x^p)_{i+\frac{1}{2}}\frac{u^j_{i+1} - u_i^j}{h'} - (x^p)_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i^j - u^j_{i-1}}{h}}{\frac{h' + h}{2}} = f(x_i, t_j),$$

即

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + \frac{2\tau^2}{h' + h}[(x^p)_{i+\frac{1}{2}}(\frac{u^j_{i+1} - u_i^j}{h'}) -$$
$$(x^p)_{i-\frac{1}{2}}(\frac{u_i^j - u^j_{i-1}}{h})] + \tau^2 f(x_i, t_j).$$

式中 h' 如下:

$t = t_j$ 层最右端边界点 x 的坐标为 $x_r^j = 1 + kt_j$, 因为

$$\frac{1 + kt_j}{h} = \frac{1 + kj\tau}{1/n} = \frac{1 + kj/(mkn)}{1/n} = n + \frac{j}{m}.$$

①如果 $n + \frac{j}{m}$ 是整数,则该边界点落在矩形网格上,即第 j 层最右端节点编号为 $n + \frac{j}{m}$, 此时 $h' = h$.

②如果 $n + \frac{j}{m}$ 不是整数,则第 j 层落在矩形节点上的最大节点,应该取 $n + \frac{j}{m}$ 的最大整数部分 $n + [\frac{j}{m}]$,则

$$h' = 1 + kt_j - (n + [\frac{j}{m}])h = (\frac{j}{m} - [\frac{j}{m}])h.$$

记 $u^j=(u_0^j,u_1^j,\cdots,u_{n+nkT-1}^j,u_{n+nkT}^j)$,则由式(7)~(9)知 u^0、u^1 已完全确定.现在假设 u^{j-1}、u^j 已确定.记 $r=\dfrac{\tau}{h}$,称 r 为网格比,由式(6)可得

$$u_i^{j+1}=r^2(x^p)_{i-\frac12}u_{i-1}^j+[2-r^2((x^p)_{i+\frac12}+(x^p)_{i-\frac12})]u_i^j+r^2(x^p)_{i+\frac12}u_{i+1}^j-u_i^{j-1}+\tau^2f(x_i,t_j),\ 1\leqslant i\leqslant n+\frac{j}{m}-1.$$

因而差分格式是显式的,对于任意网格比 r,差分方程是唯一可解的.

2.2　四阶精度差分格式

首先将方程(1)改写为

$$u_{tt}=x^pu_{xx}+px^{p-1}u_x+f(x,t).\tag{10}$$

为保证四阶精度,利用待定系数法得到 u_{xx} 和 u_x 的计算公式

$$(u_{xx})_i^j=\frac{1}{h^2}\left(-\frac{1}{12}u_{i-2}^j+\frac43u_{i-1}^j-\frac52u_i^j+\frac43u_{i+1}^j-\frac{1}{12}u_{i+2}^j\right)+O(h^4),\tag{11}$$

$$(u_x)_i^j=\frac1h\left(\frac{1}{12}u_{i-2}^j-\frac23u_{i-1}^j+\frac23u_{i+1}^j-\frac{1}{12}u_{i+2}^j\right)+O(h^4).\tag{12}$$

对时间导数 u_{tt} 仍采用二阶中心差分格式进行离散

$$u_{tt}=\frac{1}{\tau^2}(u_i^{j-1}-2u_i^j+u_i^{j+1})+O(\tau^2).\tag{13}$$

将式(11)~(13)代入式(10)并忽略高阶无穷小量 $O(\tau^2+h^4)$,得到

$$\frac{1}{\tau^2}(u_i^{j-1}-2u_i^j+u_i^{j+1})=x^p\frac{1}{h^2}\left(-\frac{1}{12}u_{i-2}^j+\frac43u_{i-1}^j-\frac52u_i^j+\frac43u_{i+1}^j-\frac{1}{12}u_{i+2}^j\right)+px^{p-1}\frac1h\left(\frac{1}{12}u_{i-2}^j-\frac23u_{i-1}^j+\frac23u_{i+1}^j-\frac{1}{12}u_{i+2}^j\right)+f(x,t).$$

整理得

$$u_i^{j+1}=2u_i^j-u_i^{j-1}+x^p\frac{\tau^2}{h^2}\left(-\frac{1}{12}u_{i-2}^j+\frac43u_{i-1}^j-\frac52u_i^j+\frac43u_{i+1}^j-\frac{1}{12}u_{i+2}^j\right)+px^{p-1}\frac{\tau^2}{h}\left(\frac{1}{12}u_{i-2}^j-\frac23u_{i-1}^j+\frac23u_{i+1}^j-\frac{1}{12}u_{i+2}^j\right)+\tau^2f(x,t).\tag{14}$$

式(14)即为求解退化波动方程(1)的时间二阶精度、空间四阶精度的差分格式.此格式为一个7点格式,对于空间方向第2层以及距离斜边1个点和2个点处无法利用此格式,还需要单独建立其差分格式.

对于空间第2层处差分格式,同样采用待定系数法求得 u_{xx} 和 u_x 的计算公式

$$(u_{xx})_i^j=\frac{1}{h^2}\left(\frac56u_{i-1}^j-\frac54u_i^j-\frac13u_{i+1}^j+\frac76u_{i+2}^j-\frac12u_{i+3}^j+\frac{1}{12}u_{i+4}^j\right)+O(h^4),$$

$$(u_x)_i^j=\frac1h\left(-\frac14u_{i-1}^j-\frac56u_i^j+\frac32u_{i+1}^j-\frac12u_{i+2}^j+\frac{1}{12}u_{i+3}^j\right)+O(h^4).$$

将上式和式(13)代入式(10)并忽略高阶无穷小量 $O(\tau^2+h^4)$,整理得

$$u_i^{j+1}=2u_i^j-u_i^{j-1}+x^p\frac{\tau^2}{h^2}\left(\frac56u_{i-1}^j-\frac54u_i^j-\frac13u_{i+1}^j+\frac76u_{i+2}^j-\frac12u_{i+3}^j+\frac{1}{12}u_{i+4}^j\right)+px^{p-1}\frac{\tau^2}{h}\left(-\frac14u_{i-1}^j-\frac56u_i^j+\frac32u_{i+1}^j-\frac12u_{i+2}^j+\frac{1}{12}u_{i+3}^j\right)+\tau^2f(x,t).$$

对于距离斜边2个点处差分格式,同理可得

$$u_i^{j+1}=2u_i^j-u_i^{j-1}+x^p\frac{\tau^2}{h^2}\left(\frac{1}{12}u_{i-4}^j-\frac12u_{i-3}^j+\frac76u_{i-2}^j-\frac13u_{i-1}^j-\frac54u_i^j+\frac56u_{i+1}^j\right)+px^{p-1}\frac{\tau^2}{h}\left(-\frac{1}{12}u_{i-3}^j+\frac12u_{i-2}^j-\frac32u_{i-1}^j+\frac56u_i^j+\frac14u_{i+1}^j\right)+\tau^2f(x,t).$$

对于距离斜边1个点处的值,则不易采用待定系数法求得差分格式,本文采用相应精度的插值法进行计算.

3　格式检验

通过数值模拟方法分别给出2种差分格式下离散问题的解,并进行数值计算.文中所涉及到的误差定义如下:

最大绝对误差

$$L_\infty=\max_{\substack{0\leqslant i\leqslant n+nkT\\0\leqslant j\leqslant mknT}}\left|u_i^j-U_i^j\right|,$$

式中:u_i^j 表示点 $u(x_i,t_j)$ 处的数值解;U_i^j 表示点 $U(x_i,t_j)$ 处的精确解.

使用2种差分格式求解问题(1)~(3),取

$$f(x,t)=(1-px^{p-1}-x^p)\mathrm{e}^{x+t},$$

初值条件 $u(x,0)=\varphi(x)=\mathrm{e}^x$,$u_t(x,0)=\psi(x)=\mathrm{e}^x$,边值条件 $u(0,t)=\alpha(t)=\mathrm{e}^t$,$u(l_k(t),t)=\beta(t)=\mathrm{e}^{l_k(t)+t}$,即

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)-(x^p u_x(x,t))_x=(1-px^{p-1}-x^p)\mathrm{e}^{x+t}, \\ (x,t)\in(0,l_k(t))\times(0,T), \\ u(0,t)=\mathrm{e}^t, \\ u(l_k(t),t)=\mathrm{e}^{l_k(t)+t}, t\in(0,T), \\ u(x,0)=\mathrm{e}^x, \\ u_t(x,0)=\mathrm{e}^x, x\in(0,1). \end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x,t)=\mathrm{e}^{x+t}$.

令 $p=0.5$, $k=0.2$, $T=3$, 通过数值模拟可以得到问题的数值解,同时可以得到精确解的图像(图3).

当 h=0.05, τ=0.025、0.012 5、0.006 25时,使用空间二阶精度差分格式和空间四阶精度差分格式所得误差结果如图4所示.结果表明:用这2种差分格式得到的数值解与精确解非常接近,绝对误差也比较小.因此,该差分格式符合实际需要,验证了2种差分格式的精确性.

当 $t=T=3$,空间步长为0.05,时间步长分别为0.025、0.012 5和0.006 25时,采用空间二阶和四阶精度差分格式所得数值解的绝对误差对比曲线如图5所示.空间四阶精度差分格式的绝对误差比空间二阶精度差分格式的绝对误差更小,说明空间四阶精度差分格式优于空间二阶精度差分格式.

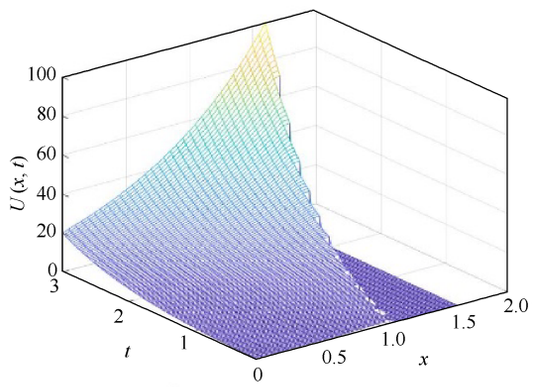


图3　精确解的图像

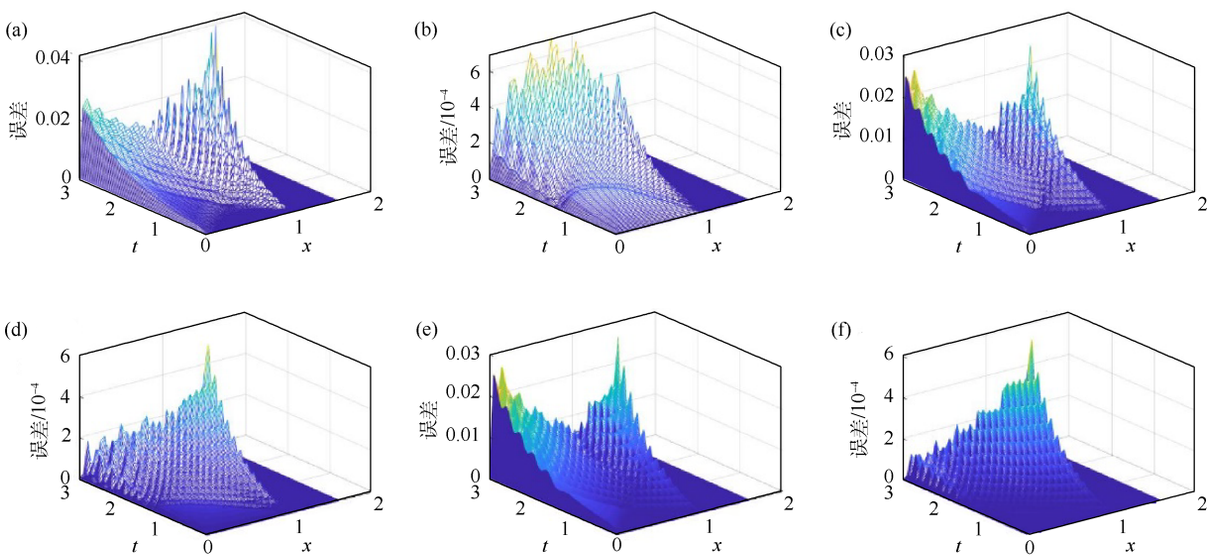


图4　不同时间步长时2种差分格式得到的数值解与精确解的误差图像

(a)τ=0.025,空间二阶精度差分格式;(b)τ=0.025,空间四阶精度差分格式;(c)τ=0.012 5,空间二阶精度差分格式;(d)τ=0.012 5,空间四阶精度差分格式;(e)τ=0.006 25,空间二阶精度差分格式;(f)τ=0.006 25,空间四阶精度差分格式

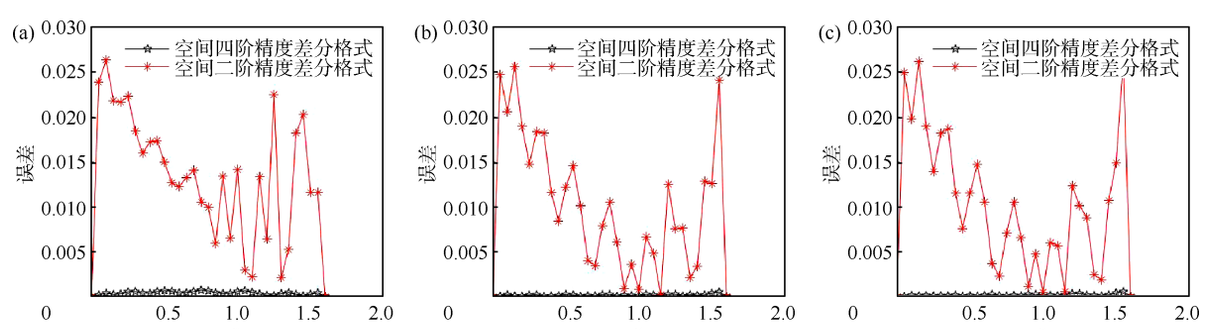


图5　2种差分格式误差比较

(a)τ=0.025;(b)τ=0.012 5;(c)τ=0.006 25

当$h=0.05,\tau=0.025$时,空间二阶和四阶精度差分格式所得数值解的最大绝对误差分别为0.041 5和$6.930\ 3\times10^{-4}$;当$h=0.05,\tau=0.012\ 5$时,2种差分格式对应的最大绝对误差分别为0.025 8和$4.931\ 3\times10^{-4}$;当$h=0.05,\tau=0.006\ 25$时,2种差分格式对应的最大绝对误差分别为0.026 3和$5.168\ 1\times10^{-4}$.可知,步长相同时,空间四阶精度差分格式最大绝对误差比二阶的更小,并且空间二阶精度差分格式的最大绝对误差达到了10^{-2},而空间四阶精度差分格式的最大绝对误差能达到10^{-4},更加充分地说明空间四阶精度差分格式比空间二阶精度差分格式具有更高的精确性.

4　结束语

本文利用有限差分法研究了移动边界域上一类退化波动方程的数值解法,针对此类退化波动方程,对时间方向的离散采用二阶中心差分格式,对空间方向的离散分别采用二阶和四阶差分格式.最后通过数值模拟验证了有限差分法在解决此类问题时是有效可行的,且空间四阶精度差分格式比空间二阶精度差分格式具有更高的精确性.

参 考 文 献

[1] 孙志忠.偏微分方程数值解法[M].北京:科学出版社,2012.

[2] 胡健伟,汤怀民.微分方程数值解法[M].北京:科学出版社,2007.

[3] ZUAZUA E. Propagation, observation, control and numerical approximation of waves[J]. SIAM Review, 2005,47:197-243.

[4] BOUJAOUI H E, MANIAR L, BOUSLOUS H. Uniform boundary stabilization for the finite difference discretization of the 1-D wave equation[J]. Afrika Matematika,2016,27:1239-1262.

[5] BOUJAOUI H E. Uniform interior stabilization for the finite difference fully-discretization of the 1-D wave equation[J]. Afrika Matematika,2018,29:557-574.

[6] WANG S Y,KREISS G. Convergence of summation-by-parts finite difference methods for the wave equation[J]. Journal of Scientific Computing,2017,71:219-245.

[7] GUO B Z, XU B B. A semi-discrete finite difference method to uniform stabilization of wave equation with local viscosity[J]. IFAC Journal of Systems and Control,2020,13:100100.

[8] SAADATMANDI A, DEHGHAN M. Numerical solution of the one-dimensional wave equation with an integral condition[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations,2006,23(2):282-292.

[9] 刘建康,李欢欢.Robin型边界阻尼波动方程的半离散一致指数稳定逼近[J].系统科学与数学,2020,40(4):599-611.

[10] SUN Z H,WU X N. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system[J]. Applied Numerical Mathematics,2006,56:193-209.

[11] NEGREANU M, ZUAZUA E. Uniform boundary controllability of a discrete 1-D wave equation[J]. Systems & Control Letters,2003,48:261-280.

[12] AMMARI K, CHENTOUF B, SMAOUI N. Boundary stabilization of a one-dimensional wave equation by a switching time-delay: a theoretical and numerical study[J]. Mathematics Subject Classification, arXiv: 2007, 12599v1.

[13] ZHENG F, ZHOU H. State reconstruction of the wave equation with general viscosity and non-collocated observation and control[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2021,502(1):125257.

[14] AALTO A. Output error minimizing back and forth nudging method for initial state recovery[J]. Systems & Control Letters,2016,94:111-117.

[15] WANG D Y,LIU X G. Numerical solution of a class of hyperbolic equations with variable coefficients[J]. Journal of Physics (Conference Series), 2020, 1606: 012010.

[16] 王涛,刘铁钢.求解对流扩散方程的一致四阶紧致格式[J].计算数学,2016,38:391-404.

[17] 姜蕴芝,葛永斌.求解波动方程的2种显式高精度紧致差分格式[J].四川师范大学学报(自然科学版),2017,40(2):177-183.

[18] YANG X J,GE Y B,ZHANG L. A class of high-order compact difference schemes for solving the Burgers' equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019,358:394-417.

[19] TONG F H,FENG X L,LI Z L. Fourth order compact FD methods for convection diffusion equations with variable coefficients[J]. Applied Mathematics Letters, 2021,121:107413.

[20] SHEN J, SUN Z, CAO W. A finite difference scheme on graded meshes for time-fractional nonlinear korteweg-de Vries equation[J]. Applied Mathematics and Computation,2019,361:752-765.

(责任编辑:马田田)