DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.04.002

利用洛比达法则求极限研究*

景慧丽
(火箭军工程大学理学院,陕西西安 710025)

摘 要

本文对洛比达法则进行了研究,重点探讨了应用洛比达法则求极限的注意事项和使用技巧.

关键词: 洛必达法则,极限.
中图分类号: O172

0 引 言

极限是《高等数学》课程和《数学分析》课程中最重要的概念之一,正确地求解极限是理工科学员必须掌握的. 当然求极限的方法有很多,如等价无穷小代换、洛必达法则、极限的四则运算法则、两个重要极限、夹逼准则等等,其中洛比达法则是众多求极限方法中最常用的方法之一,洛比达法则也是求解$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式最有效的方法之一. 但是,某些情况下用洛必达法则求极限未必是最佳的,有可能会出现越求越复杂甚至求不出结果的情况. 可是,笔者在教学中发现,学员经常是遇到求极限的题目就直接用洛必达法则来解,而且应用洛必达法则时经常出错. 注意到洛必达法则的重要性和有效性,笔者研究了使用洛必达法则求极限的注意事项.

1 洛必达法则及其说明

洛必达(L´Hospital)法则[1]是由瑞士数学家约翰·伯努利(Johann Bernoulli)提出的,是指在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式值的方法. 具体定理是:设函数$f(x)$及$F(x)$满足如下条件:

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}F(x)=0$;

(2) $f(x)$和$F(x)$在$\mathring{U}(a)$内都可导,且$F'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A$($A$可为实数,也可为$\pm\infty$或$\infty$),

那么,$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$.

注1 定理中的条件和结论必须是自变量的同一变化过程. 其实只要是自变量的同一变化过程,并且满足定理条件,结论依然成立. 例如,如果把定理中自变量的变化趋势$x\to a$换为$x\to+\infty$、$x\to-\infty$、$x\to\infty$、$x\to a^+$或$x\to a^-$,只要把条件(2)作相应的修改,定理仍然成立. 为了研究问题的方便,本文中关于洛必达法则的一些说明及注意事项均以自变量$x\to a$这种情况讨论.

注2 如果把定理中的条件(1)换成$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}F(x)=\infty$,其它两个条件不变,结论依然成立,即洛必达法则对$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式都是成立的.

注3 定理中的三个条件缺一不可,只要有一个不成立,结论就不一定成立,所以使用洛必达法则求极限时,必须满足定理的三个条件.

2 利用洛必达法则求极限的注意事项

洛必达法则可以简单地理解为:当$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$不容易求时,可以通过求$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$的值,从而得到$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$的值. 但是,使用洛必达法则时必须注意

收稿日期:2015-09-16
* 火箭军工程大学2015年度教育教学研究立项课题(EPGC2015008).

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

以下几点:

2.1　若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 既不存在,也不是无穷大,则洛必达法则失效[2]

只有当 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(这里的极限存在是指极限值为确定的实数)或为无穷大时,才能通过求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 的值来确定 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ 的值;当 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在(这里的极限不存在不包括极限值为 ∞、$-\infty$、$+\infty$ 这三种情形)也不是无穷大时,洛必达法则就失效了,此时 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ 也有可能存在,需要用其它方法来计算. 例如,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$ 是属于 $\frac{0}{0}$ 型的极限,但由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在,因此极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$ 是不能用洛必达法则来计算的,其实该极限可以用无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小这个原理来计算,即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$. 因此,不是所有的未定式都可以用洛必达法则来计算.

2.2　定理只是充分非必要的

洛必达法则告诉我们,当 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在时,$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ 也存在,并且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$. 但是该定理的否命题却是不一定成立的,即我们不能由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在,得到 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ 也不存在的结论,此时 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ 也有可能存在,只是需要用其它方法来求,例如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$ 就属于这种情形.

2.3　当 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 比 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ 复杂难求时,不宜使用洛必达法则

某些未定式的极限虽然满足洛必达法则的条件,但是由于 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 并不比 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ 简单易求,因此,此时也不宜使用洛必达法则来求[2]. 例如,对于极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$,虽然满足洛必达法则的使用条件,但是,如果利用洛必达法则计算的话,则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. 显然出现了循环现象,因此用洛必达法则是不能求出结果的. 其实本题可以将分子分母同除以 e^x 来求解,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$.

2.4　数列极限不能直接利用洛必达法则计算

洛必达法则成立的条件之一是函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 内都要可导,由于数列是不可导的,所以对数列极限是不能直接利用洛必达法则来计算的. 但如果所求数列极限是(或经过变形化简后是) $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式,则可以依据归结原则[3](即设 f 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是:对任何含于 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在且相等.). 先把自然数 n 换成 x,即把数列极限先换成其对应的函数极限,然后用洛必达法则求得相应函数的极限,就可以得到原数列的极限. 例如,对于数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{\pi}{2}-\arctan n}$,可以按照下列方法求解:

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{\pi}{2}-\arctan n}=1$.

2.5　洛必达法则可以连续多次使用

洛必达法则可以连续多次使用,即若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,并且函数 $f'(x)$、$F'(x)$ 满足定理的条件,则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{F''(x)}=$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

…. 需要注意的是每次使用都要验证条件,否则就会出错. 例如,对于$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$,显然满足连续使用洛必达法则的条件,但是,如果不验证条件直接利用洛必达法则来计算的话,则

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to1}\frac{6x}{6x-2}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to1}\frac{6}{6}=1.$$

显然上述解题过程中步骤"$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6}{6}$"是错误的,因为$x\to1$时,$6x\to6$,$6x-2\to4$,即$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}$既不是$\dfrac{0}{0}$型的未定式也不是$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}$是不满足洛必达法则的使用条件,是不能利用洛必达法则来计算的. 其实,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}$可以利用极限的四则运算法则直接计算,即$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

2.6 洛必达法则和其它方法结合效果最好

洛必达法则尽管是求解$\dfrac{0}{0}$型和$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式的一种非常有效的方法,但它不是万能的也不是最好的,洛必达法则只有和其它方法结合起来效果才最好,其作用发挥的才最完美. 这里的其它方法通常是指能化简的尽量化简,能用等价无穷小代换的尽量用等价无穷小代换等. 另外,如果在求极限的过程中出现了非零常数因子,则先求出非零常数因子的极限值,就可以避免出现复杂的求导运算,大大简化求极限的过程.

例 1[4] 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

解 原式=

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{[x\ln(1+x)-x^2](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{2[x\ln(1+x)-x^2]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{2x[\ln(1+x)-x]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)}{2x[\ln(1+x)-x]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2[\ln(1+x)-x]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{2(\frac{1}{1+x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

注 4 上述求极限的过程中,主要是先对极限表达式进行了化简,再利用洛必达法则,这里用到的化简方法有:分子有理化、提出公因子、约去零因子、等价无穷小代换,并且在求极限的过程中用到了先计算出非零常数因子的技巧,即先计算出$\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})=2$,再用洛必达法则,大大简化了计算过程. 如果不先把这个值计算出来而是直接利用洛必达法则来计算的话,是非常麻烦的.

2.7 其他类型的未定式要先转化成$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型,然后再使用洛必达法则

常见的未定式除了$\dfrac{0}{0}$型和$\dfrac{\infty}{\infty}$型,还有其他类型的未定式,如$\infty-\infty$型、$0\cdot\infty$型、0^0型、1^∞型及∞^0型等. 洛必达法则只对$\dfrac{0}{0}$型和$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式成立,其他类型的未定式是不能直接使用洛必达法则的. 其他类型的未定式需要先转化成$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式,然后再使用洛必达法则. 例如对于$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$[5]是$\infty-\infty$型的未定式,如果先将$\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}$通分,则原极限就变成了$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}$,显然该极限就变成了$\dfrac{0}{0}$型的未定式了,接下来就可以用洛必达法则来计算了. 其实,所有$\infty-\infty$型的未定式,都可以通过通分这种方法转化成$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式. 再比如,对于$\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x$是$0\cdot\infty$型的未定式,如果将$x^2\ln x$变形为$\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$,则该$0\cdot\infty$型的未定式就变成了$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式了,接下来就可以利用洛必达法则来计算了. 其实所有的$0\cdot\infty$型的未定式,都可以通过将其中的无穷小或无穷大取倒数这种方法转化成$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式. 再比如,对于$\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$,是$1^\infty$型的未定式,如果利用公式"$a^b=e^{b\ln a}$"将这个

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

幂指函数 $x^{\frac{1}{1-x}}$ 变形为 $e^{\frac{1}{1-x}\ln x}$，则该 1^{∞} 型的未定式就变成了 $0\cdot\infty$ 型的未定式，对这个 $0\cdot\infty$ 型的未定式再通过将其中的无穷小或无穷大取倒数的方法就可以转化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式. 其实，所有 0^0 型、1^{∞} 型及 ∞^0 型的未定式都可以先利用公式 "$a^b = e^{b\ln a}$" 变形为 $0\cdot\infty$ 型的未定式，再把 $0\cdot\infty$ 型的未定式通过取倒数的方法转化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式即可.

注意到其他类型的未定式转化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式的方法不尽相同，为了便于理解记忆，把常用的转化方法和技巧归纳整理如下:

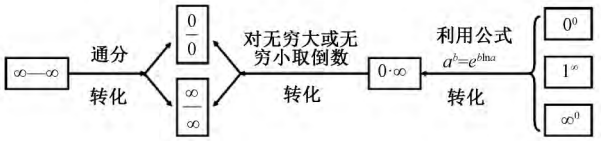


图 1　其它形式的未定式转化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式的方法

注 5　有的题目需要进行变形或化简后，才能利用上述转化方法. 例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ 尽管是 $\infty - \infty$ 型的未定式，但是无法直接通分. 注意到 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$，所以可以先利用变量代换 $x = \frac{1}{t}$，把原极限变为 $\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$，此时就可以通过通分即转化成 $\frac{0}{0}$ 型的未定式 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t - \ln(1+t)}{t^2}$.

3　结　语

洛必达法则是求一元函数极限最常用的方法之一，使用洛必达法则求极限时必须满足其使用条件. 注意到每种方法都有其自身的优越性与局限性，洛必达法则求极限也存在着不足，它只有和其他求极限的方法结合起来用，效果才最佳.

参 考 文 献

[1]　同济大学应用数学系. 高等数学(上)(第六版)[M]. 北京: 高等教育出版社，2007: 135.
[2]　马知恩，王绵森. 高等数学疑难问题选讲(第一版)[M]. 北京: 高等教育出版社，2014: 87－89.
[3]　华东师范大学数学系. 数学分析(上)(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社，2001: 52.
[4]　景慧丽，李应岐，王惠珍，等. 问题牵引式教学法在"方向导数"教学中的应用[J]. 首都师范大学学报(自然科学版)，2015，6: 13-17.
[5]　吴忠祥. 工科数学分析基础教学辅导书(上)(第一版)[M]. 北京: 高等教育出版社，2009: 163-183.
[6]　张天德，蒋晓芸. Б. П. 吉米多维奇高等数学习题精选精解(第一版)[M]. 济南: 山东科学技术出版社，2010: 83.

On the Application of L´Hospital Rule in Limit Calculation

Jing Huili

(School of Natural Science, The Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi　710025)

Abstract

In this paper, the problems needing attention and using skills in solving limit by the L´Hospital rule is studied.

Key words: L´Hospital rule, limit.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net