DOI:10.19789/j.1004-9398.2017.06.002

关于“$n-n$”序列的混合均值性质*

杨 小 平
(陕西交通职业技术学院基础部,陕西 西安 710018)

摘 要

利用初等方法和解析方法,研究了两个 Smarandache 函数 $\varphi(n)$,$\delta_k(n)$ 分别与 $a(n)$ 性质. 获得了 $\varphi(n)$,$\delta_k(n)$ 分别与 $a(n)$ 的混合均值性质及渐近公式,拓展了经典的算术函数的相关研究工作.

关键词: 复合函数,均值,渐近公式.
中图分类号: O156.4

0 序 言

文[1]中,Smazrandache 教授介绍了一个数列 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6,……,简称为“$n-n$”数列,简记为$\{a_n\}$($n=1,2,3,\cdots$). 即对于每个自然数 n 重复 n 次,$n-n$ 的数列的一般通项公式为:当 $\frac{r(r-1)}{2}<n\leqslant\frac{r(r+1)}{2}$ 时,$a_n=r$,其中 r 为正整数. 首先给出如下定义:

定义 1 对于任意的正整数 $n>1$,令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准分解式,则 $\varphi(n)=\sum_{k=1}^{n}1$,$\varphi(n)$ 是小于或等于 n 的正整数中与 n 互质的数的数目;

$$\delta_k(n)=\begin{cases}\max\{d\in N\mid d\mid n,(d,k)=1\} & n\neq 0,\\ 0 & n=0.\end{cases}$$

$\prod_{p\mid k}$ 表示对所有满足 $p\mid k$ 的素因子 p 求积,ε 是任意给定的正数.

不少学者对该数列进行了研究[2-3]. 有关 $n-n$ 的数列复合均值分布的研究结果也不少[2-3],我们利用解析数论中的常用方法研究了关于 $n-n$ 的数列 $a(n)$ 与数论函数 $\varphi(n)$ 和 $\delta_k(n)$ 的乘积 $\varphi(n)\cdot a(n)$,$\delta_k(n)\cdot a(n)$ 的渐近性,也就是下面将要证明的结论:

定理 1 对于任意实数 $x>1$,且 $k\in\mathbf{N}^+$,则:

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)a(n)=\frac{96\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{7\pi^2}x^{\frac{7}{4}}+O(x^{\frac{5}{4}}\ln x).$$

定理 2 对于任意实数 $x>1$,且 $k\in N^+$,则:

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_k(n)a(n)=\frac{16\times 2^{\frac{1}{4}}}{21}x^{\frac{7}{4}}\prod_{p\mid k}\frac{p}{p+1}+O(x^{\frac{3+\varepsilon}{2}}).$$

1 引 理

引理 1[4] 对于任何实数 $x>1$,设

$$\frac{M(M-1)}{2}<x\leqslant\frac{M(M+1)}{2},$$

则有如下渐近式,

$$M=\sqrt{2x}+O(1).$$

证明: 对于任何实数 $x>1$,当 $\frac{M(M-1)}{2}<x<\frac{M(M+1)}{2}$,由不等式 $\frac{M(M-1)}{2}<x$ 有:

$$\frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}<M<\frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}.$$

由不等式 $x\leqslant\frac{M(M+1)}{2}$ 有:

$$\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}\leqslant M \quad 或 \quad M\leqslant\frac{-1-\sqrt{1+8x}}{2}.$$

综合可得

$$\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}\leqslant M<\frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}.$$

立即可得:$M=\sqrt{2x}+O(1)$.

收稿日期:2016-11-03
* 中华职业教育社重点课题基金项目(ZJY16029);陕西省教育科学规划课题(SGH16V033);陕西省职业技术教育学会教育科研规划课题(SZJY-1637)资助项目.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

引理 2 对于任意实数 $x > 1$,则: $\sum_{n\leqslant x} a(n) = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + O(x)$,必存在正整数 M,当 $\frac{M(M-1)}{2} < x \leqslant \frac{M(M+1)}{2}$ 时有,

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} a(n) &= \sum_{r=1}^{M-1}\sum_{\frac{r(r-1)}{2}<r\leqslant\frac{r(r+1)}{2}} r + O(M^2)\\ &= \frac{1}{6}M(M+1)(2M+1) + O(M^2)\\ &= \frac{1}{3}M^3 + O(M^2)\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + O(x).\end{aligned}$$

引理 3[2] 对于任何实数 $x > 1$,则:

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\log x).$$

引理 4[5] 对于任何实数 $x > 1$,及正整数 k,则:

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_k(n) = \frac{x^2}{2}\prod_{p\mid k}\frac{p}{p+1} + O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}).$$

2 定理的证明

2.1 定理 1 的证明

对于任何实数 $x > 1$,令 M 是不大于 x 的最大的正整数,且 $\frac{M(M-1)}{2} < x \leqslant \frac{M(M+1)}{2}$,我们可以推断: $m = \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2} + O(1)$,并注意到 $\ln m = \frac{1}{2}\ln x + O(1)$. 若 n 取遍区间 $\left[\frac{1}{2}(2m + m(m-1)), \frac{1}{2}(2(m+1) + m(m+1))\right]$,则 $a(n)$ 取遍区间 $[0, m]$,及 $a(0) = 0$,我们可以推断,

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)a(n) &= \sum_{m=1}^{M-1}\sum_{i\leqslant m}\varphi(n)a(n) + O\Big(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\right)}\varphi(i)a(n)\Big)\\ &= \sum_{m=1}^{M-1}\varphi(m)\sum_{i\leqslant m}a(i) + O\Big(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\right)}\varphi(i)a(n)\Big)\\ &= \sum_{m=1}^{M-1}\varphi(m)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + O(x)\right) + O\Big(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\right)}\varphi(i)a(n)\Big)\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\sum_{m=1}^{M-1}\varphi(m)m^{\frac{3}{2}} + O(\varphi(M)M^{\frac{3}{2}}).\end{aligned}$$

$\varphi(n) \ll n^{\varepsilon}$ 其中 ε 为一固定的整数.

令 $A(x) = \sum_{n\leqslant x}\varphi(n)$,用 able 求和公式[2,9] 与引理 2,引理 3 易得:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{M} t^{\frac{3}{2}}\varphi(t) &= M^{\frac{3}{2}}A(M) - \int_2^M A(t)\,(t^{\frac{3}{2}})'\mathrm{d}t + O(1)\\ &= M^{\frac{3}{2}}\Big(\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)\Big) - \int_2^M\Big(\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)\Big)\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\ &= M^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{3}{\pi^2}M^2 + O(M\log M)\Big) - \frac{3}{2}\int_2^M\Big(\frac{3}{\pi^2}t^{\frac{5}{2}} + O(t\log t)\Big)\mathrm{d}t\\ &= \frac{3}{\pi^2}M^{\frac{7}{2}} + O(M^{\frac{5}{2}}\log M) - \frac{3}{7}\Big(\frac{3}{\pi^2}M^{\frac{7}{2}} + O(M^{\frac{5}{2}}\log M)\Big)\\ &= \frac{4}{7}\frac{3}{\pi^2}M^{\frac{7}{2}} + O(M^{\frac{5}{2}}\log M).\end{aligned}$$

注意到 $M = \sqrt{2x} + O(1)$,且 $\ln M = \frac{1}{2}\ln x + O(1)$,可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)a(n) &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{12}{7}\frac{3}{\pi^2}(\sqrt{2x})^{\frac{7}{2}} + O((\sqrt{2x})^{\frac{5}{2}}\ln\sqrt{2x})\\ &= \frac{96\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{7\pi^2}x^{\frac{7}{4}} + O(x^{\frac{5}{4}}\ln x).\end{aligned}$$

2.2 定理 2 的证明

由 $a(n)$ 的定义及 $\delta_k(n) \ll n^{\varepsilon}$($\varepsilon$ 为一固定的整数),有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\delta_k(n)a(n) &= \sum_{m=1}^{M-1}\sum_{i\leqslant m}\delta_k(n)a(n) + O\Big(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\right)}\delta_k(i)a(i)\Big)\\ &= \sum_{m=1}^{M}\delta_k(n)\sum_{i\leqslant m}a(i) + O\Big(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\right)}\delta_k(i)a(i)\Big)\\ &= \sum_{m=1}^{M}\delta_k(m)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + V(x)\right) + O\Big(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\right)}\delta_k(i)a(i)\Big)\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\sum_{m=1}^{M}\delta_k(m)m^{\frac{3}{2}} + O(V(M)M^{\frac{3}{2}}).\end{aligned}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

令 $A(x)=\sum_{n\leqslant x}\delta_k(n)$，用 able 求和公式[2]及引理 2，引理 4 得:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{M}t^{\frac{3}{2}}\delta_k(t)&=M^{\frac{3}{2}}A(M)-\int_2^M A(t)\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'\mathrm{d}t+O(1)\\&=M^{\frac{3}{2}}\Big(\sum_{n\leqslant x}\delta_k(n)\Big)-\int_2^M\Big(\sum_{n\leqslant x}\delta_k(n)\Big)\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt+O(1)\\&=M^{\frac{3}{2}}\Big(\frac{M^2}{2}\prod_{p\mid k}\frac{p}{p+1}+O\big(M^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\big)\Big)-\frac{3}{2}\int_2^M\Big(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{2}\prod_{p\mid k}\frac{p}{p+1}+O\big(t^{2+\varepsilon}\big)\Big)\mathrm{d}t\\&=\frac{M^{\frac{7}{2}}}{2}\prod_{p\mid k}\frac{p}{p+1}+O\big(M^{3+\varepsilon}\big)-\frac{3}{7}\Big(\frac{M^{\frac{7}{2}}}{2}\prod_{p\mid k}\frac{p}{p+1}\Big)\\&=\frac{2}{7}M^{\frac{7}{2}}\prod_{p\mid k}\frac{p}{p+1}+O\big(M^{3+\varepsilon}\big).\end{aligned}$$

注意到 $M=\frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}+O(1)$，且 $\ln M=\frac{1}{2}\ln x+O(1)$，立即有:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\delta_k(n)a(n)&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{7}\left(\sqrt{2x}\right)^{\frac{7}{2}}\prod_{p\mid k}\frac{p}{p+1}+O\left(\left(\sqrt{2x}\right)^{3+\varepsilon}\right)\\&=\frac{16\times2^{\frac{1}{4}}}{21}x^{\frac{7}{4}}\prod_{p\mid k}\frac{p}{p+1}+O\big(x^{\frac{3+\varepsilon}{2}}\big).\end{aligned}$$

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Tom M A. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[3] 张文鹏. 关于正整数的六边形数部分 [J]. 商洛师范专科学校学报, 2005, 19(2): 2-3.

[4] 易媛. 关于三多边形数补数及其渐近性质 [J]. 商洛师范专科学校学报, 2005, 19(2): 3-5.

[5] 王明军. 一个 Smarandache 数列及其均值性质 [J]. 首都师范大学学报: 自然科学版, 2015, 36(1): 2-3.

[6] 王明军. 关于一个 Smarandache 数列的研究 [J]. 海南大学学报: 自然科学版, 2014, 32(4): 302-304.

[7] 杨存典, 李超, 刘端森. 关于五边形数的余数及其渐进公式 [J]. 甘肃科学学报, 2007, 17(2): 47-50.

[8] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[9] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

The Hybrid Mean Value Properties of “$n-n$” Sequence

Yang Xiaoping

(Foundation Department, Shaanxi College of Communication Technology, Xi'an Shaanxi 710018)

Abstract

By using the primary method and the analysis method, this paper discusses two Smarandache functions $\varphi(n)$, $\delta_k(n)$ and the function $a(n)$. We obtain the average value nature and the asymptotic formula of $\varphi(n)$, $\delta_k(n)$ and $a(n)$. And the relevant research work of classical arithmetical functions are developed.

Key words: compound function, mean value, asymptotic formula.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net