DOI:10.19789/j.1004-9398.2023.02.002
文献引用:陈小芳.二项式系数与Lucas数四次幂的一个关系[J].首都师范大学学报(自然科学版),2023,44(2):8-10. CHEN X F.A relation between binomial coefficients and four-powers of Lucas numbers[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2023,44(2):8-10.

二项式系数与Lucas数四次幂的一个关系*

陈　小　芳**

(渭南师范学院数学与统计学院,陕西 渭南　714099)

摘要:若$\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$ $(n,i\in N^*,$且$n\geqslant i)$表示二项式系数,第l个Lucas数是L_l,其中l是非负整数;对任意正整数n和非负整数k,数列$\left\{\binom{n}{i}\right\}_{i=0}^{n}$和$\{L_{k+i}^{p}\}_{i=0}^{n}$的卷积为$l(k,p,n)=\binom{n}{0}L_k^p+\binom{n}{1}L_{k+1}^p+\cdots+\binom{n}{n}L_{k+n}^p=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}L_{k+i}^p$。本文利用初等数论方法证明了$p=4$时,等式$l(k,4,n)=3^nL_{4k+2n}+4(-1)^{k+n}L_{2k+n}+3\times 2^{n+1}$成立。

关键词:二项式系数;Lucas数;四次幂;卷积
中图分类号:O156.2　　**文献标识码**:A

A relation between binomial coefficients and four-powers of Lucas numbers*

CHEN Xiaofang**

(School of Mathematics and Statistics, Weinan Normal University, Weinan Shaanxi　714099)

Abstract: Let $\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$ $(n,i\in N^*,$ and $n\geqslant i)$be a binomial coefficient. Supposing that l is a nonnegative integer and L_l is the l-th Lucas number, furthermore, when n is a fixed positive integer and k is a fixed nonnegative integer, the convolution of the sequence $\left\{\binom{n}{i}\right\}_{i=0}^{n}$ and $\{L_{k+i}^{p}\}_{i=0}^{n}$ is $l(k,p,n)=\binom{n}{0}L_k^p+\binom{n}{1}L_{k+1}^p+\cdots+\binom{n}{n}L_{k+n}^p=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}L_{k+i}^p$. When $p=4$, the identity $l(k,4,n)=3^nL_{4k+2n}+4(-1)^{k+n}L_{2k+n}+3\times 2^{n+1}$ is proved by elementary number theory method.

Keywords: binomial coefficient; Lucas number; fourth powers; convolution
CLC: O156.2　　**DC**: A

收稿日期:2022-05-06
* 陕西省科技厅科学研究计划资助项目(2021JM-520)
** 通信作者:chenxf@wnu.edu.cn

0　引　言

Fibonacci数列和Lucas数列是数学中2个比较重要的数列,除了在数论及其他学科有重要的应用之外,也因为本身蕴含的数学之美而一直都吸引着众多学者对其研究。通过对Lucas数、Fibonacci数及二项式系数的各种研究,已经得到了很多关于二项式系数的恒等式及不少包含Fibonacci数与Lucas数的恒等式,甚至于Fibonacci数与Lucas数关系的恒等式[1-17],其中文献[1]研究了二项式系数的幂与逆的恒等式;文献[4]给出了广义Fibonacci数与广义Lucas数的一些恒等式;文献[7]拓广了带有二项式系数的广义Fibonacci和Lucas数的一个结果;文献[8-14]研究了Fibonacci和Lucas数的矩阵的相关性质;文献[15-17]研究了二项式数与Fibonacci数列的卷积。这些恒等式为数论研究提供了理论依据,一些学者探寻关于Fibonacci数与Lucas数的新的研究领域,得到了许多新方法和结论,如晁晶晶[18]和陈小芳[19-20]将Lucas数与二项式数结合,证实了Lucas数与Fibonacci数的新的关系。

对于给定的非负整数k以及正整数m和n,定义数列$\left\{\binom{n}{i}\right\}_{i=0}^{n}$和$\{L_{k+i}^{m}\}_{i=0}^{n}$的卷积$l(k,m,n)$为

$$l(k,m,n)=\binom{n}{0}L_k^m+\binom{n}{1}L_{k+1}^m+\cdots+\binom{n}{n}L_{k+n}^m=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}L_{k+i}^m。\tag{1}$$

对于$l(k,m,n)$的计算,文献[18-20]分别给出了$m=1,2$和3的情形,证明了

$$l(k,1,n)=2^kL_{n+2k},$$

$$l(k,2,n)=\begin{cases}5^{\frac{n+1}{2}}\times F_{2k+n}, & n=2l+1,\\ 5^{\frac{n}{2}}\times L_{2k+n}, & n=2l,\end{cases}$$

$$l(k,3,n)=\begin{cases}2^nL_{3k+2n}+3(-1)^{k+n}L_{k-n}, & k\geqslant n,\\ 2^nL_{3k+2n}+3L_{n-k}, & k<n,\end{cases}$$

式中L_{n+2k}和F_{2k+n}分别为第$n+2k$个Lucas数和第$2k+n$个Fibonacci数。论文应用初等数论方法,结合Lucas数列与组合数性质,进一步探究了二项式系数与Lucas数的四次方幂关系,得到了一个有趣的结果。

1　主要引理及定理

Lucas数列通项公式为$L_{l+1}=L_l+L_{l-1}(l=1,2,\cdots)$,记$\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。将$\alpha$,$\beta$代入Lucas数列,简单计算,容易得到如下引理:

引理1　$1-\alpha^2=-\alpha$;

引理2　$1-\beta^2=-\beta$;

引理3　$1+\alpha^4=3\alpha^2$;

引理4　$1+\beta^4=3\beta^2$。

本文讨论了$l(k,m,n)$当$m=4$时的情形,得到了二项式系数与Lucas数四次方的一个恒等式,证明了下面的定理。

定理　对于任意给定的非负整数k及正整数n,定义$l(k,m,n)$为$\left\{\binom{n}{i}\right\}_{i=0}^{n}$和$\{L_{k+i}^{m}\}_{i=0}^{n}$的卷积(1),则有

$$l(k,4,n)=\binom{n}{0}L_k^4+\binom{n}{1}L_{k+1}^4+\cdots+\binom{n}{n}L_{k+n}^4=3^nL_{4k+2n}+4(-1)^{k+n}L_{2k+n}+3\times2^{n+1},\tag{2}$$

式中L_{4k+2n}和L_{2k+n}分别为第$4k+2n$和$2k+n$个Lucas数。

2　定理的证明

对于非负整数n,$L_n=\alpha^n+\beta^n$,其中$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。

由此可知

$$L_l^4=(\alpha^l+\beta^l)^4=\alpha^{4l}+4(-1)^l\alpha^{2l}+4(-1)^l\beta^{2l}+\beta^{4l}+6。\tag{3}$$

由式(3)及(1)可知

$$\begin{aligned}l(k,4,n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}L_{k+i}^4=&\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\alpha^{4k+4i}+4(-1)^{k+i}\alpha^{2k+2i}+4(-1)^{k+i}\beta^{2k+2i}+\beta^{4k+4i}+6)=\\&\alpha^{4k}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{4i}+4(-1)^k\alpha^{2k}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\alpha^{2i}+4(-1)^k\beta^{2k}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\beta^{2i}+\\&\beta^{4k}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^{4i}+6\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}。\end{aligned}\tag{4}$$

由二项式定理可知

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{4i}=(1+\alpha^4)^n,\tag{5}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^{4i}=(1+\beta^4)^n, \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\alpha^{2i}=(1-\alpha^2)^n, \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\beta^{2i}=(1-\beta^2)^n。 \tag{8}$$

将式(5)~(8)代入式(4),借助于引理1~4,有

$$\begin{aligned}l(k,4,n)=&\alpha^{4k}(1+\alpha^4)^n+4(-1)^k\alpha^{2k}(1-\alpha^2)^n+\\&4(-1)^k\beta^{2k}(1-\beta^2)^n+\beta^{4k}(1+\beta^4)^n+6\times 2^n=\\&\alpha^{4k}(3\alpha^2)^n+4(-1)^k\alpha^{2k}(-\alpha)^n+\\&4(-1)^k\beta^{2k}(-\beta)^n+\beta^{4k}(3\beta^2)^n+3\times 2^{n+1}=\\&3^n\alpha^{4k+2n}+4(-1)^{k+n}\alpha^{2k+n}+\\&4(-1)^{k+n}\beta^{2k+n}+3^n\beta^{4k+2n}+3\times 2^{n+1}=\\&3^n(\alpha^{4k+2n}+\beta^{4k+2n})+\\&4(-1)^{k+n}(\alpha^{2k+n}+\beta^{2k+n})+3\times 2^{n+1}=\\&3^nL_{4k+2n}+4(-1)^{k+n}L_{2k+n}+3\times 2^{n+1}。\end{aligned} \tag{9}$$

定理得证。

3 结束语

根据已有研究结果,研究了$m=1,2,3,4$情况下的相关结论并猜想m为其他正整数时有类似的结论,还可做进一步研究。

参 考 文 献

[1] WU Y, GAO W. Identities involving powers and inverse of binomial coefficients [J]. Journal of Mathematical Research & Exposition, 2011, 31(6): 1021-1029.

[2] YANG J Z, WANG Y P. A kind of identities for products reciprocals q-binomial, coefficients [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2014, 29(4): 573-582.

[3] OHTSUKA H, NAKAMURA S. On the sum of reciprocal Fibonacci number [J]. The Fibonacci Quarterly, 2009, 46/47(2): 153-159.

[4] WLOCH A. Some identities for the generalized Fibonacci numbers and the generalized Lucas numbers [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219: 5564-5568.

[5] MA R, ZHANG W P. Several identities involving the Fibonacci numbers and Lucas numbers [J]. The Fibonacci Quarterly, 2007, 45(2): 164-170.

[6] ZHANG G J. The infinite sum of reciprocal of the Fibonacci numbers[J].数学研究与评论,2011,31(6): 1030-1034.

[7] XUE L, ZHANG Z Z. Extensions of an approach to generalized Fibonacci and Lucas numbers with binomial coefficients [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2020, 35(1): 56-62.

[8] SHEN S Q, CEN J M. On the spectral norms of r-circulant matrices with the (k,h)-Fibonacci and (k,h)-Lucas numbers [J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2014, 41(4): 386-390.

[9] ZHANG C H, LIU D. On the properties of generalized fibonacci numbers with binomial coefficients [J]. Journal of Central China Normal University (Natural Sciences), 2017, 51(5): 581-584.

[10] 杨佳,岑建苗.关于Jacobsthal数和Jacobsthal-Lucas数的r-循环矩阵的行列式和逆[J].宁波大学学报(自然科学版),2013,26(2):108-113.

[11] 王晨,卢青林. Lucas数的标准分解式中诸素因数的指数[J].淮阴师范学院学报(自然科学版),2015,14(2): 104-106.

[12] 邓勇.基于广义Fibonacci和Lucas数的准循环矩阵研究[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2015,32(6): 72-76.

[13] 李笑丽,何承源,雷林.含Pell数和Pell-Lucas数乘积的斜循环矩阵的行列式及其性质[J].数学理论与应用,2020,40(1):110-120.

[14] 何承源,邱涛,雷林.包含Jacobsthal和Jacobsthal-Lucas数的r-循环矩阵的谱范数[J].数学理论与应用,2018,38(3):59-68.

[15] 谢甜甜,杨海,许倩.关于二项式系数与Fibonacci数奇次幂的恒等式[J].黑龙江大学自然科学学报,2021,38(1):32-38.

[16] 李小雪,陈国慧.一个关于Fibonacci多项式及Fibonacci数的数列的注记[J].西安航空学院学报,2019,37(5): 79-81.

[17] 杨海,贾亦真,高晓梅.二项式系数与Fibonacci数$4m$次幂的关系[J].首都师范大学学报(自然科学版),2019,40(1):8-10.

[18] 晁晶晶.广义杨辉三角形与Lucas数列的关系研究[J].新乡学院学报,2011,28(3):196-197.

[19] 陈小芳.Lucas数列与杨辉三角形的又一关系[J].江西科学,2013,31(3):287-288.

[20] 陈小芳.关于Lucas数立方与二项式数的卷积公式[J].西华大学学报(自然科学版),2018,37(1):51-53.

(责任编辑:马田田)