首都师范大学学报(自然科学版)
第 41 卷 第 6 期 Journal of Capital Normal University No. 6
2020 年 12 月 (Natural Science Edition) Dec. ,2020

有关广义欧拉函数 $\varphi_3(n)$ 的一方程的解*

姜莲霞 张四保

(喀什大学数学与统计学院,新疆 喀什 844008)

摘要:以广义欧拉函数 $\varphi_3(n)$ 与欧拉函数 $\varphi(n)$ 混合方程 $\varphi(xy)=k(\varphi_3(x)+\varphi_3(y))$ 为对象,探讨当 x,y 中至少有一数满足 $\leqslant 3$ 时的正整数解. 结合 2 个欧拉函数的性质,得到当 x,y 中至少有一数满足 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}\varphi(n)$ 时,该方程只在 $k=3、4、6、8$ 时,有整数解;当 x,y 中都不满足 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}\varphi(n)$ 及引理 1 中情况(1)中的 $\beta=\omega(n)-\alpha-1=0,1$ 时,该方程只在 $k=2、3、4、5、6、8$ 时,有整数解.

关键词:广义欧拉函数 $\varphi_3(n)$;欧拉函数 $\varphi(n)$;正整数解

中图分类号:O156 **DOI**:10.19789/j.1004-9398.2020.06.001

0 引 言

欧拉函数 $\varphi(n)$ 是数论中重要内容之一,其在理论研究和实际应用中都有着十分重要的意义[1]. 对于包含欧拉函数 $\varphi(n)$ 的方程的正整数解的研究有着大量的研究成果,如文献[2-8]. 在将 Lehmer 同余式从模素数的平方推广到模任整数的平方时[9],Cai[10]引入了广义欧拉函数 $\varphi_e(n)$. 对于广义欧拉函数 $\varphi_e(n)$ 的性质以及方程解的研究,有文献[11-16]进行了一定的研究,为探讨欧拉函数 $\varphi(n)$ 与广义欧拉函数 $\varphi_e(n)$ 结合的性质,本文将讨论广义欧拉函数 $\varphi_3(n)$ 与欧拉函数 $\varphi(n)$ 混合方程式

$$\varphi(xy)=k(\varphi_3(x)+\varphi_3(y)) \tag{1}$$

的可解性问题.

1 引 理

引理 1[16] 若 $n>3, n=3^{\alpha}\prod_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i}$ 正整数 n 的标准式,$(p_i,3)=1, 1\leqslant i\leqslant t$,则 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}\varphi(n)+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha-1}}{3}$,$\alpha=0$ 或 1,且 $p_i\equiv 2(\mathrm{mod}3)$, $1\leqslant i\leqslant t$,式中 $\Omega(n)$ 表示正整数 n 的素因子个数,$\omega(n)$ 表示正整数 n 的相异素因子个数;$\varphi_3(n)=\frac{1}{3}\varphi(n)$,其他.

2 结论及其证明

对于式(1),显然无满足 $1\leqslant x,y\leqslant 2$ 的正整数解. 而当 $x,y>3$ 时,由引理 1 中有关 $\varphi_3(n)$ 的计算公式,$\varphi_3(x)$ 与 $\varphi_3(y)$ 的值都有可能会出现 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}\varphi(n)$,$\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(\varphi(n)-1)$,$\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(\varphi(n)+1)$,$\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(\varphi(n)-2^{\beta})$ 或 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(\varphi(n)+2^{\beta})$ 这 5 种情况,这里 $\beta=\omega(n)-\alpha-1$ 为引理 1 中的情况(1),那么在结合过程中就会出现 25 种情况. 同时,当 $x,y>3$ 时,因 $\beta=\omega(x)-\alpha-1$ 与 $\beta=\omega(y)-\alpha-1$ 的值是结合 $x,y>3$ 的值来确定的,这样讨论起来相对较为繁琐,本文将讨论当 x,y 中至少有一数满足 $\leqslant 3$,与引理 1 中情况(1)的 $\beta=\omega(n)-\alpha-1=0,1$ 时式(1)的正整数解,给出了如下结论.

定理 1 对于式(1),当 x,y 中至少有一数满足 $\leqslant 3$,

(1)当 x,y 中至少有一数满足 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}\varphi(n)$ 时,式(1)只在 $k=3、4、6、8$ 时有整数解,且当 $k=3$ 时方程(1)有整数解,且式(1)有整数解

收稿日期:2019-12-21

*喀什大学校内一般课题[(19)2652]

$(x,y)=(1,y)$、$(2,y_1)$、$(x,1)$、$(x_1,2)$,其中 x、x_1,y、$y_1=3^{\alpha}\prod_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i}>3,(p_i,3)=1,1\leqslant i\leqslant t$,$x$、$x_1$,$y$、$y_1$ 是满足关系式 $\varphi_3(n)=\frac{\varphi(n)}{3}$ 的正整数,且 $\alpha=0,1$ 时,至少有 $p_i\equiv 1(\mathrm{mod}3)$ 或 $\alpha\geqslant 2,\gcd(x_1,2)=\gcd(2,y_1)=1$;

当 $k=4$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(3,7)$、$(3,14)$、$(7,3)$、$(14,3)$;

当 $k=6$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(2,y)$,$(x,2)$,其中 $x,y=3^{\alpha}\prod_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i}>3,(p_i,3)=1,1\leqslant i\leqslant t$,$x,y$ 是满足关系式 $\varphi_3(n)=\frac{\varphi(n)}{3}$ 的正整数,且 $\alpha=0,1$ 时,至少有 $p_i\equiv 1(\mathrm{mod}3)$ 或 $\alpha\geqslant 2$,$\gcd(x,2)=\gcd(2,y)=2$;

当 $k=8$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(3,39)$、$(3,45)$、$(3,72)$、$(3,78)$、$(3,84)$、$(3,90)$、$(39,3)$、$(45,3)$、$(72,3)$、$(78,3)$、$(84,3)$、$(90,3)$.

(2) 当 x,y 中都不满足 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}\varphi(n)$,且引理 1 中情况(1)中的 $\beta=\omega(n)-\alpha-1=0,1$ 时,式(1)只在 $k=2$、3、4、5、6、8 时有整数解,且

当 $k=2$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(1,3)$、$(1,4)$、$(1,6)$、$(2,3)$、$(3,1)$、$(4,1)$、$(6,1)$、$(3,2)$、$(1,10)$、$(10,1)$、$(3,4)$、$(4,3)$;

当 $k=3$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(3,3)$、$(3,6)$、$(6,3)$;

当 $k=4$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(1,5)$、$(1,8)$、$(1,12)$、$(2,5)$、$(5,1)$、$(8,1)$、$(12,1)$、$(5,2)$、$(1,20)$、$(1,30)$、$(20,1)$、$(30,1)$、$(2,4)$、$(2,6)$、$(4,2)$、$(6,2)$、$(2,10)$、$(10,2)$、$(3,5)$、$(3,8)$、$(5,3)$、$(8,3)$、$(3,16)$、$(16,3)$、$(3,22)$、$(22,3)$;

当 $k=5$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(2,22)$、$(22,2)$、$(3,11)$、$(11,3)$、$(3,25)$、$(25,3)$;

当 $k=6$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(3,12)$、$(12,3)$、$(3,15)$、$(3,24)$、$(15,3)$、$(24,3)$;

当 $k=8$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(2,8)$、$(2,12)$、$(8,2)$、$(12,2)$、$(2,20)$、$(2,30)$、$(20,2)$、$(30,2)$、$(3,48)$、$(48,3)$、$(3,51)$、$(3,96)$、$(51,3)$、$(96,3)$、$(3,30)$、$(30,3)$、$(3,132)$、$(3,150)$、$(132,3)$、$(150,3)$.

证明 当 x,y 中至少有一数$\leqslant 3$ 时,若求出 $1\leqslant x\leqslant 3$ 情况下式(1)的整数解,则由对称性就可得到 $1\leqslant y\leqslant 3$ 情况下的整数解,下文将就 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的情况进行讨论,此时有当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时有 $\varphi_3(x)=0$,当 $x=3$ 时有 $\varphi_3(x)=1$,而 $\varphi(y)\geqslant 2$ 为偶数. 当 $\beta=\omega(n)-\alpha-1=0,1$ 时,$\varphi_3(x)$ 与 $\varphi_3(y)$ 的值可能为 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(\varphi(n)-1)$ 或 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(\varphi(n)+1)$ 或 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(\varphi(n)-2)$ 或 $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}(\varphi(n)+2)$.

情况 1 当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,此时由式(1)可得 $\varphi(xy)=k\varphi_3(y)$. 由于 $1\leqslant x\leqslant 2$,则 x 与 y 的最大公因数 $\gcd(x,y)=1,2$.

情况 1.1 当 $\gcd(x,y)=1$ 时,有 $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(y)$.

情况 1.1.1 当 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}\varphi(y)$ 时,由式(1)可得,此时只有当 $k=3$ 时式(1)有整数解,且方程(1)有整数解 $(x,y)=(1,y)$、$(2,y_1)$,其中 $y,y_1=3^{\alpha}\prod_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i}>3,(p_i,3)=1,1\leqslant i\leqslant t,\gcd(2,y_1)=1$. 由对称性可得,此时式(1)有整数解 $(x,y)=(x,1)$,$(x_1,2)$,其中 $x,x_1=3^{\alpha}\prod_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i}>3,(p_i,3)=1,1\leqslant i\leqslant t,\gcd(2,x_1)=1$,此时 x、x_1,y、y_1 是满足关系式 $\varphi_3(n)=\frac{\varphi(n)}{3}$ 的正整数,且 $\alpha=0$、1 时,至少有 $p_i\equiv 1(\mathrm{mod}3)$ 或 $\alpha\geqslant 2$.

情况 1.1.2 当 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)-1)$ 时,由式(1)可得 $(k-3)\varphi(y)=k$,即

$$\varphi(y)=\frac{k}{k-3}=\frac{k-3}{k-3}+\frac{3}{k-3}=1+\frac{3}{k-3}. \tag{2}$$

由式(2)有当 $k=4$ 时有 $\varphi(y)=4$,当 $k=6$ 时有 $\varphi(y)=2$. 当 $k=4,\varphi(y)=4$ 时,此时 $y=5$、8、10、12. 但 $y=10$ 不会使得 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)-1)$ 成立,故式(1)有整数解 $(x,y)=(1,5)$、$(1,8)$、$(1,12)$、$(2,5)$. 由对称性可得此时式(1)有正整数解 $(x,y)=(5,1)$、$(8,1)$、$(12,1)$、$(5,2)$. 当 $k=6,\varphi(y)=2$ 时,此时 $y=3$、4、6,此时 y 值都不会使得 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)-1)$ 成立,故此时式(1)无整数解.

情况 1.1.3　当 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)+1)$ 时,由式(1)可得

$$(3-k)\varphi(y)=k. \tag{3}$$

由式(3)有当 $k=2$ 时有 $\varphi(y)=2$. 因而此时式(1)有整数解 $(x,y)=(1,3)$、$(1,4)$、$(1,6)$、$(2,3)$. 由对称性可得此时式(1)有整数解 $(x,y)=(3,1)$、$(4,1)$、$(6,1)$、$(3,2)$.

情况 1.1.4　当 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)-2)$ 时,由式(1)可得 $(k-3)\varphi(y)=2k$, 即

$$\varphi(y)=\frac{2k}{k-3}=\frac{2(k-3)}{k-3}+\frac{6}{k-3}=2+\frac{6}{k-3}. \tag{4}$$

由式(4)有:当 $k=4$ 时有 $\varphi(y)=8$; 当 $k=6$ 时有 $\varphi(y)=4$; 当 $k=4$,$\varphi(y)=8$ 时,有 $y=15$、16、20、24、30, 但 $y=15$、16、24 不会使得 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)-2)$ 成立,故式(1)有整数解 $(x,y)=(1,20),(1,30)$. 由对称性可得此时式(1)有整数解 $(x,y)=(20,1)$、$(30,1)$. 当 $k=6$,$\varphi(y)=4$ 时,此时 $y=5$、8、10、12, 而这些 y 值都不会使得 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)-2)$ 成立,故此时式(1)无整数解.

情况 1.1.5　当 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)+2)$ 时,由式(1)可得

$$(3-k)\varphi(y)=2k. \tag{5}$$

由式(5)有,当 $k=2$ 时有 $\varphi(y)=4$, 此时 $y=5$、8、10、12, 但 $y=5$、8、12 不会使得 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)+2)$ 成立,故此时式(1)有整数解 $(x,y)=(1,10)$. 由对称性可得此时式(1)有整数解 $(x,y)=(10,1)$.

情况 1.2　当 $\gcd(x,y)=2$ 时,有 $\varphi(xy)=2\varphi(x)\varphi(y)=2\varphi(y)$.

情况 1.2.1　当 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}\varphi(y)$ 时,因而此时只有当 $k=6$ 时,式(1)有整数解,且整数解为 $(x,y)=(2,y)$, 其中 $y=3^{\alpha}\prod_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i}>3$,$(p_i,3)=1$,$1\leqslant i\leqslant t$,$\gcd(2,y)=2$. 由对称性可得,此时式(1)有整数解,且整数解为 $(x,y)=(x,2)$, 其中 $x=3^{\alpha}\prod_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i}>3$,$(p_i,3)=1$,$1\leqslant i\leqslant t$,$\gcd(2,x)=2$, 此处 x,y 是满足关系式 $\varphi_3(n)=\frac{\varphi(n)}{3}$ 的正整数,且 $\alpha=0,1$ 时,至少有 $p_i\equiv 1(\mathrm{mod}3)$ 或 $\alpha\geqslant 2$.

情况 1.2.2　当 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)-1)$ 时,由式(1)可得 $(k-6)\varphi(y)=k$, 即

$$\varphi(y)=\frac{k}{k-6}=\frac{k-6}{k-6}+\frac{6}{k-6}=1+\frac{6}{k-6}. \tag{6}$$

由式(6)有:当 $k=8$ 时有 $\varphi(y)=4$; 当 $k=12$ 时有 $\varphi(y)=2$. 当 $k=8$,$\varphi(y)=4$ 时,此时 $y=5$、8、10、12, 但是 $(2,5)=1$,$y=10$ 不会使得 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)-1)$ 成立,故此时式(1)有正整数解 $(x,y)=(2,8)$、$(2,12)$. 由对称性可得此时式(1)有整数解 $(x,y)=(8,2)$、$(12,2)$. 当 $k=12$,$\varphi(y)=2$ 时,此时 $y=3$、4、6, 这些 y 值都不会使得 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)-1)$ 成立,故此时方程(1)无整数解.

情况 1.2.3　当 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)+1)$ 时,由式(1)可得

$$(6-k)\varphi(y)=k. \tag{7}$$

由式(7)有,当 $k=4$ 时有 $\varphi(y)=2$, 此时式(1)有整数解 $(x,y)=(2,4),(2,6)$. 由对称性可得此时式(1)有整数解 $(x,y)=(4,2),(6,2)$.

情况 1.2.4　当 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)-2)$ 时,由式(1)可得 $(k-6)\varphi(y)=2k$, 即

$$\varphi(y)=\frac{2k}{k-6}=\frac{2(k-6)}{k-6}+\frac{12}{k-6}=2+\frac{12}{k-6}. \tag{8}$$

由式(8)有:当 $k=7$ 时有 $\varphi(y)=14$; 当 $k=8$ 时有 $\varphi(y)=8$; 当 $k=9$ 时有 $\varphi(y)=6$; 当 $k=12$ 时有 $\varphi(y)=4$. 将 $\varphi(y)=6,4$ 代入 $\frac{1}{3}(\varphi(y)-2)$, 使得 $\frac{1}{3}(\varphi(y)-2)\notin Z^{+}$. 而当 $k=7$,$\varphi(y)=14$ 时,由于 $\varphi(y)=14$ 无解,则此时式(1)无整数解. 当 $k=8$,$\varphi(y)=8$ 时,此时 $y=15$、16、20、24、30, 但 $y=15$、16、24 不会使得 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)-2)$

成立,故式(1)有整数解 $(x,y)=(2,20),(2,30)$. 由对称性可得此时式(1)有整数解 $(x,y)=(20,2),(30,2)$.

情况 1.2.5 当 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)+2)$ 时,由式(1)可得

$$(6-k)\varphi(y)=2k. \tag{9}$$

由式(9)有:当 $k=5$ 时有 $\varphi(y)=10$;当 $k=4$ 时有 $\varphi(y)=4$;当 $k=3$ 时有 $\varphi(y)=2$. 当 $\varphi(y)=2$ 时,有 $\frac{1}{3}(\varphi(y)+2)\notin \mathbf{Z}^+$,故 $\varphi(y)=2$ 舍去. 当 $k=5,\varphi(y)=10$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(2,22)$. 由对称性可得此时式(1)有整数解 $(x,y)=(22,2)$. 当 $k=4,\varphi(y)=4$ 时,此时 $y=5$、8、10、12,但是 $(2,5)=1,y=8,12$ 不会使得 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}(\varphi(y)+2)$ 成立,故式(1)有整数解 $(x,y)=(2,10)$. 由对称性可得此时式(1)有整数解 $(x,y)=(10,2)$.

情况 2 当 $x=3$ 时,此时由式(1)可得

$$\varphi(3y)=k(1+\varphi_3(y)). \tag{10}$$

此时 x 与 y 的最大公因数 $\gcd(3,y)=1,3$.

情况 2.1 当 $\gcd(3,y)=1$ 时,由式(10)有

$$2\varphi(y)=k(1+\varphi_3(y)). \tag{11}$$

情况 2.1.1 当 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}\varphi(y)$ 时,由式(11)有 $(6-k)\varphi(y)=3k$. 此时可得只当 $k=4$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(3,7)$、$(3,14)$. 由对称性可得式(1)有整数解 $(x,y)=(7,3)$、$(14,3)$.

情况 2.1.2 当 $\varphi_3(y)=\frac{\varphi(y)-1}{3}$ 时,由式(11)有 $(6-k)\varphi(y)=2k$. 此时当 $k=4$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(3,5)$、$(3,8)$. 由对称性可得式(1)有整数解 $(x,y)=(5,3)$、$(8,3)$;当 $k=5$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(3,11)$. 由对称性可得式(1)有整数解 $(x,y)=(11,3)$.

情况 2.1.3 当 $\varphi_3(y)=\frac{\varphi(y)+1}{3}$ 时,由式(11)有 $(6-k)\varphi(y)=4k$. 此时式(1)可得,当 $k=2$ 时,有整数解 $(x,y)=(3,4)$,由对称性可得有整数解 $(x,y)=(4,3)$;当 $k=4$ 时,有整数解 $(x,y)=(3,16)$,由对称性可得有整数解 $(x,y)=(16,3)$;当 $k=5$ 时,有整数解 $(x,y)=(3,25)$,由对称性可得有整数解 $(x,y)=(25,3)$.

情况 2.1.4 当 $\varphi_3(y)=\frac{\varphi(y)-2}{3}$ 时,由式(11)有 $(6-k)\varphi(y)=k$. 此时可得方程(1)无整数解.

情况 2.1.5 当 $\varphi_3(y)=\frac{\varphi(y)+2}{3}$ 时,由式(11)有 $(6-k)\varphi(y)=5k$. 此时可得,只当 $k=4$ 时式(1)有整数解 $(x,y)=(3,22)$. 由对称性可得式(1)有整数解 $(x,y)=(22,3)$.

情况 2.2 当 $\gcd(3,y)=3$ 时,由式(10)有

$$3\varphi(y)=k(1+\varphi_3(y)). \tag{12}$$

情况 2.2.1 当 $\varphi_3(y)=\frac{1}{3}\varphi(y)$ 时,由式(12)有 $(9-k)\varphi(y)=3k$. 此时可得,当 $k=8$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(3,39)$、$(3,45)$、$(3,72)$、$(3,78)$、$(3,84)$、$(3,90)$. 由对称性可得式(1)有整数解 $(x,y)=(39,3)$、$(45,3)$、$(72,3)$、$(78,3)$、$(84,3)$、$(90,3)$.

情况 2.2.2 当 $\varphi_3(y)=\frac{\varphi(y)-1}{3}$ 时,由式(12)有 $(9-k)\varphi(y)=2k$. 此时式(1)可得,当 $k=6$ 时,有整数解 $(x,y)=(3,12)$,由对称性可得有整数解 $(x,y)=(12,3)$;当 $k=8$ 时,有整数解 $(x,y)=(3,48)$. 由对称性可得有整数解 $(x,y)=(48,3)$.

情况 2.2.3 当 $\varphi_3(y)=\frac{\varphi(y)+1}{3}$ 时,由式(12)有 $(9-k)\varphi(y)=4k$. 此时式(1)可得,当 $k=3$ 时,有整数解 $(x,y)=(3,3)$、$(3,6)$,由对称性可得有整数解 $(x,y)=(6,3)$;当 $k=6$ 时,有整数解 $(x,y)=(3,15)$、$(3,24)$,由对称性可得有整数解 $(x,y)=(15,3)$、$(24,3)$;当 $k=8$ 时,有整数解 $(x,y)=(3,51)$、$(3,96)$,由对称性可得有整数解 $(x,y)=(51,3)$、$(96,3)$.

情况 2.2.4 当 $\varphi_3(y)=\frac{\varphi(y)-2}{3}$ 时,由式(12)有 $(9-k)\varphi(y)=k$. 此时可得,只当 $k=8$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(3,30)$,由对称性可得式(1)有整数解 $(x,y)=(30,3)$.

情况 2.2.5 当 $\varphi_3(y)=\frac{\varphi(y)+2}{3}$ 时,由式(12)有 $(9-k)\varphi(y)=5k$. 此时可得,只当 $k=8$ 时,式(1)有整数解 $(x,y)=(3,132)$、$(3,150)$. 由对称性可得式(1)有整数解 $(x,y)=(132,3)$、$(150,3)$.

结合以上讨论,可得定理 1.

参 考 文 献

[1] 袁合才,李培峦. 二元变系数欧拉函数方程 $\varphi(ab)=15\varphi(a)+17\varphi(b)$ 的正整数解[J]. 宝鸡文理学院学报(自然科学版),2018,38(2):5-8.

[2] 王明军. 关于数论函数方程 $c_r(n^k)=\varphi(n)$ [J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2017,38(4):1-3.

[3] 张四保. 有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程的正整数解[J]. 数学的实践与认识,2014,44(20):302-305.

[4] 郭瑞,赵西卿,张利霞,等. 关于欧拉方程 $\varphi(mn)=2\times3(\varphi(m)+\varphi(n))$ 的正整数解[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版),2016,34(2):60-63.

[5] 张四保,席小忠. 有关方程 $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解[J]. 南京师大学报(自然科学版),2016,39(1):41-47.

[6] 许霞,徐小凡. 关于欧拉方程 $\varphi(ab)=2^k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2016,41(4):6-9.

[7] 张四保,杨振志. Euler 函数方程 $x^k-\varphi(x^k)=Px$ 的解[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2017,38(4):8-11.

[8] 高丽,张佳凡. Euler 函数方程 $\varphi(xy)=11(\varphi(x)+\varphi(y))$ 的正整数解[J]. 云南师范大学学报(自然科学版),2017,37(5):13-19.

[9] 胡孟君. 广义欧拉函数 $\varphi_e(n)$ 的奇数值[D]. 杭州:浙江大学,2010.

[10] Cai T X. A congruence involving the quotients of Euler and its applications (I)[J]. Acta Arith, 2002, 103(4): 313-320.

[11] 张四保,官春梅,杨燕妮. 广义 Euler 函数 $\varphi_2(n)$ 与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 混合的一方程[J]. 数学的实践与认识,2018,48(9):265-268.

[12] 王容,廖群英. 关于广义欧拉函数 $\varphi_5(N)$[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2018,41(4):509-519.

[13] 沈忠燕,蔡天新,胡孟君. 广义欧拉函数的奇偶性(Ⅱ)[J]. 数学进展,2016,45(4):505-510.

[14] 张四保. 与广义 Euler 函数有关的一方程的解[J]. 科技通报,2018,34(8):1-5.

[15] 张四保. 广义 Euler 函数方程 $\varphi_6(n)=2^{\omega(n)}$ 的解[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2018,43(2):36-41.

[16] CAI T X, SHEN Z Y, HU M J. On the parity of the generalized Euler function[J]. 数学进展,2013,42(4):505-510.

Solutions of an Equations on Generalized Euler Function $\varphi_3(n)$

JIANG Lianxia　ZHANG Sibao

(School of Mathematics and Statistics, Kashi University, Kashi Xinjiang　844008)

Abstract: The positive integer solutions of equation $\varphi(xy)=k(\varphi_3(x)+\varphi_3(y))$ on generalized Euler function $\varphi_3(n)$ and Euler function $\varphi(n)$ are discussed, when at least one number of x and y satisfies less than or equal to 3. Combining the calculation formula of generalized Euler function $\varphi_3(n)$ and the properties of Euler function $\varphi(n)$, the equation has positive integer solutions only at $k=3,4,6,8$ and the corresponding all positive solutions of it are obtained when at least one number of x, y is satisfied $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}\varphi(n)$, and the equation has positive integer solutions only at $k=2,3,4,5,6,8$ and $\beta=\omega(n)-\alpha-1=0,1$, the corresponding all positive solutions of it were obtained by using elementary method, when x, y are not satisfied $\varphi_3(n)=\frac{1}{3}\varphi(n)$ and in case (1) of lemma 1.

Keywords: generalized Euler function $\varphi_3(n)$; Euler function $\varphi(n)$; positive integer solution