弹簧质量对振动及波动特性的影响

杨晶然，赵丽明*，周云松，隗功民

(首都师范大学物理系，北京　100048)

摘要:本文讨论考虑弹簧质量时振子系统的振动频率、振动模式,以及相应波的传播特性.结果表明:对于质量很大的弹簧,振子的振动特性主要由1级振动模式决定;当考虑弹簧质量时,各个点的运动不能完全重复上个周期的运动,表明弹簧振子并非做纯粹的简谐振动.

关键词:弹簧;质量;频率;振动

中图分类号:O32　　**DOI**:10.19789/j.1004-9398.2021.05.007

0　引　言

振动现象在自然界中广泛存在,而简谐振动是最简单、最基本的振动形式.在力学中,常利用弹簧振子系统来研究简谐振动.事实上,弹簧振子是一个理想模型,系统中的弹簧是“轻”弹簧,其质量忽略不计.弹簧作为日常生活中一种广泛使用的弹性元件,具有吸收振动和冲击能量的功能,在车辆和坦克中有重要应用[1-3].因此,考虑弹簧质量对运动状态的影响是必要的.关于质量均匀分布的弹簧的振动特性问题,在很多文章中都有讨论[4-11].杨建宋[12]和谢利民[13]运用瑞利近似的方法,求出了弹簧系统的振动频率,并给出了弹簧的等效质量;丁履成和司明扬[14]利用牛顿定律,通过严格求解证实弹簧振动的周期与振子的质量和弹簧的质量有关.然而,弹簧质量对振动特性的影响以及高阶模式对体系运动状态的影响有多大,以上问题并未见文献报道.本文主要探讨了在给定初始条件的情况下,弹簧质量对振子的振动特性以及体系波动特性的影响.

1　弹簧的波动方程及本征频率

1.1　波动方程

假设质量均匀分布的弹簧,其质量为m,自然长度为l,劲度系数为k,弹簧的左端固定,右端连接一个质量为M的振子(图1).将弹簧离散成n个小弹簧,每一小段的长度为Δx,并设弹簧上距离左端固定处O点的距离为x处的一小段弹簧为Δx,偏离原来位置的位移为y,该小段弹簧的伸长量为Δy,那么该小段弹簧的劲度系数为$k'=\dfrac{kl}{\Delta x}$,其质量为[15-16]

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{l}\Delta x=\rho\Delta x.$$

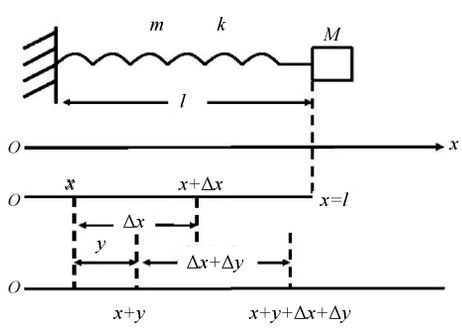


图1　弹簧振子形变示意

在振动过程中,弹簧不断地拉伸或压缩.对于原长为Δx的一小段弹簧,在某一时刻t,假定其左端受到的拉力大小为F_x,右端受到的拉力大小为$F_{x+\Delta x}$.由胡克定律可知,x处的Δx小段弹簧右端所受到的力为$F_{x+\Delta x}=\dfrac{kl}{\Delta x}\cdot\Delta y$,则$x$处$\Delta x$小段弹簧受到的合力为

$$F_{x+\Delta x}-F_x=kl\left(\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}-\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_x\right)=kl\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_x\cdot\Delta x. \quad (1)$$

根据牛顿第二定律,式(1)可整理为

收稿日期:2020-12-27

* 通信作者:zlm-phy@cnu.edu.cn

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0, \tag{2}$$

式中波速 $v=l\sqrt{\frac{k}{m}}$.

1.2　本征频率

弹簧振子体系满足条件:

$$y(0,t)=0, \tag{3}$$

$$(M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+kl\frac{\partial y}{\partial x})|_{x=l}=0. \tag{4}$$

将边界条件代入波动方程得到本征频率,其中式(3)表示弹簧左端固定处 O 点(x=0)任意时刻的位移 y=0,式(4)表示 $x=l$(自然长度)处,振子 M 所受合力的表达式.

设 $y(x,t)=X(x)T(t)$[17-18]带入式(2)得

$$y(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{\omega_n}{v}x(B_n\sin\omega_n t+D_n\cos\omega_n t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin\frac{\omega_n}{v}x\cos(\omega_n t+\phi_n). \tag{5}$$

因此,当考虑弹簧质量时,系统的振动模式是由无限多个简谐振动叠加而成.

将式(5)代入边界条件(3)和(4)可得本征方程

$$\tan\frac{\omega_n}{v}l=\frac{kl}{vM\omega_n}, \tag{6}$$

设 $\omega_e=\sqrt{\frac{k}{m}}$,并将 $v^2=\frac{kl^2}{m}$ 代入本征方程(6)可得

$$\frac{\omega_n}{\omega_e}\tan\frac{\omega_n}{\omega_e}=\frac{m}{M}. \tag{7}$$

利用方程(7)可得到体系的本征值 ω_n,其为某一简谐振动的圆频率.由此可知,弹簧振子系统的振动频率只与 $\frac{m}{M}$ 的值有关.如果给定初始条件,那么系数 C_n 与 ϕ_n 便可以确定,从而可以得到该系统的振动特性.

2　波动方程初始条件

2.1　一般初始条件

通常情况下,初始时刻将振子拉伸或压缩一段距离(初位移),那么弹簧各个点的伸长量(y)与速度(v)都是 x 的函数,因此,初始条件的一般表达式为:

$$\frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0}=\Psi(x), \tag{8}$$

$$y(x,0)=\Phi(x). \tag{9}$$

将波动方程的形式解(5)代入初始条件,再由傅里叶级数展开,整理得:

$$D_n=\frac{2\omega_n}{v(\frac{\omega_n l}{v}+\frac{1}{2}\sin2\frac{\omega_n l}{v})}\int_0^l\Phi(x)\sin\frac{\omega_n}{v}x\mathrm{d}x, \tag{10}$$

$$B_n=\frac{2}{v(\frac{\omega_n l}{v}+\frac{1}{2}\sin2\frac{\omega_n l}{v})}\int_0^l\Psi(x)\sin\frac{\omega_n}{v}x\mathrm{d}x. \tag{11}$$

因此,只要给出 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 的具体函数表达式,就可以得出 B_n 和 D_n(或 C_n 和 ϕ_n)的值(其中 $C_n=\sqrt{B_n^2+D_n^2}$,$\phi_n=\tan^{-1}\frac{D_n}{B_n}$).

2.2　特定初始条件

结合一个给定的初始条件,对各级振动特性作一个简单的分析.对于实验室常用的起振方法来说(初始时刻将振子拉伸到初位移 A 处,且弹簧各点的速度都为0),初始条件变为

$$\begin{cases}\Phi(x)=\frac{x}{l}A,\\ \Psi(x)=0.\end{cases} \tag{12}$$

因为弹簧振子系统的运动是简谐振动的叠加,因此,系数 A 只是将系统的各个量扩大 A 倍,不会影响该系统的振动特性.为了方便运算,故设 A=1.下文中,y 均表示与 A 的比值.

将其代入式(10)和(11)得:

$$D_n=\frac{2\omega_n}{v(\frac{\omega_n l}{v}+\frac{1}{2}\sin2\frac{\omega_n l}{v})}\int_0^l\frac{x}{l}\sin\frac{\omega_n}{v}x\mathrm{d}x=\frac{2\sin\frac{\omega_n l}{v}}{\frac{\omega_n l}{v}(\frac{\omega_n l}{v}+\frac{1}{2}\sin2\frac{\omega_n l}{v})}, \tag{13}$$

$$B_n=0. \tag{14}$$

因而可以确定 $C_n=D_n$,这样就可以得到弹簧的振动解为

$$y(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\sin\frac{\omega_n l}{v}}{\frac{\omega_n l}{v}(\frac{\omega_n l}{v}+\frac{1}{2}\sin2\frac{\omega_n l}{v})}\sin\frac{\omega_n}{v}x\cos\omega_n t=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin\frac{\omega_n}{v}x\cos\omega_n t. \tag{15}$$

由式(15)可知,弹簧振子体系的运动,是由无限多个本征频率的振动叠加而成,相应振子的运动方程为

$$y(l,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\sin\dfrac{\omega_n l}{v}}{\dfrac{\omega_n l}{v}\left(\dfrac{\omega_n l}{v}+\dfrac{1}{2}\sin 2\dfrac{\omega_n l}{v}\right)}\sin\frac{\omega_n}{v}l\cos\omega_n t,\tag{16}$$

利用式(6)代入式(16),整理得

$$y(l,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\omega_e^2}{\omega_n^2\left[1+\dfrac{M}{m}\left(1+\dfrac{M}{m}\dfrac{\omega_n^2}{\omega_e^2}\right)\right]}\cos\omega_n t.\tag{17}$$

由式(15)也可得到弹簧上任意一点,在t_0时刻的波动方程为

$$y(x,t_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\sin\dfrac{\omega_n}{\omega_e}}{\left(\dfrac{\omega_n}{\omega_e}\right)^2+\dfrac{\omega_n}{2\omega_e}\sin 2\dfrac{\omega_n}{\omega_e}}\sin\frac{\omega_n}{v}x\cos\omega_n t_0.\tag{18}$$

3　结果与分析

3.1　振子振动的本征频率

振子振动本征频率满足$\dfrac{\omega_n}{\omega_e}\tan\dfrac{\omega_n}{\omega_e}=\dfrac{m}{M}$,其中$\omega_e=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.因此,振动频率比$\left(\dfrac{\omega_n}{\omega_e}\right)$仅与质量比$\left(\dfrac{m}{M}\right)$有关.通过求解超越方程,得到不同$\dfrac{m}{M}$对应的$\dfrac{\omega_n}{\omega_e}$,如表1所示.结果表明:$m/M$越大,分别对应$\omega_n/\omega_e$越大;$n$越大,$\omega_n/\omega_e$越大.通过计算显示,$\Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n$的值基本相等,随着$m/M$逐渐增加,$\overline{\Delta\omega}$逐渐减小.当$m\to 0$时,$\overline{\Delta\omega}\to\pi$,即$\omega_n=(n-1)\pi$.对于基频振动,随着$m/M$增大,$\omega_1$增大,若弹簧的$m$固定,随着振子的$M$增大,基频频率降低,而当振子的$M$固定时,随着弹簧的$m$增大,基频频率增大.

实际上,大多数弹簧振子系统中,$\dfrac{m}{M}$的值是较小的,满足瑞利近似.弹簧基频振动频率(ω_1)与ω_e的比值随m/M的变化情况如图2所示.当弹簧m/M比较小时,2种方法计算所得到的本征值的比值(ω_1/ω_e)基本相同;随着m/M的增加(大约在m/M=2之后),瑞利近似的值比实际值偏大,且质量比值越大,瑞利近似就越不准确.因此,瑞利近似只适用于m/M较小的时候.

表1　不同质量比对应的振动频率比

质量比	$\dfrac{\omega_1}{\omega_e}$	$\dfrac{\omega_2}{\omega_e}$	$\dfrac{\omega_3}{\omega_e}$	$\dfrac{\omega_4}{\omega_e}$	$\dfrac{\omega_5}{\omega_e}$	$\dfrac{\omega_6}{\omega_e}$	$\dfrac{\omega_7}{\omega_e}$	$\dfrac{\Delta\omega}{\omega_e}$
0.01	0.102	3.145	6.285	9.426	12.567	15.709	18.850	3.310 0
0.30	0.522	3.234	6.331	9.457	12.590	15.727	18.866	3.076 4
0.50	0.653	3.293	6.362	9.477	12.606	15.740	18.876	3.057 4
1.00	0.860	3.426	6.437	9.529	12.645	15.771	18.902	3.032 7
10.00	1.429	3.306	7.228	10.200	12.259	16.259	19.327	2.967 9

注:ω_i/ω_e表示第i级振动频率(i取值为1~7);$\Delta\omega/\omega_e$表示平均振动频率.

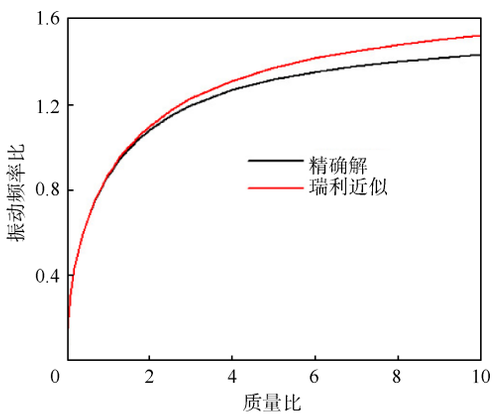


图2　弹簧基频振动频率比随质量比的变化曲线

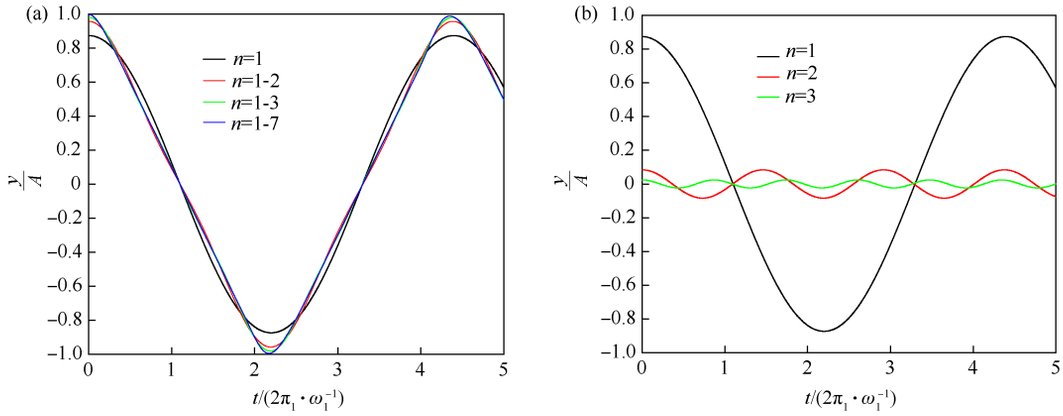
3.2　振子的振动特性

当m/M=10(比值较大)时,弹簧振子不同时间的振动如图3所示.振子的振动模式主要由1级振动模式决定,1级振动模式的振幅占总振动模式的90%,且振子的振动周期也由1级振动模式的周期决定,高阶分量对于振动特性的贡献不大.弹簧振子各级振动表明,振幅主要由1阶分量确定,随着n的增加,振幅快速衰减.高阶分量对于振动特性的作用很小,基本可以忽略不计.

3.3　弹簧振动过程中的波动特性

t=1/4T时,弹簧各处的波动特性如图4所示.当系统振动了1/4周期时,弹簧m越小,各个点基本处于平衡位置,弹簧的振动就越趋于简谐振动;弹簧m越大,振动就越复杂,1/4周期时,弹簧各个位置都不在平衡位置,且离平衡位置的距离各不相同.结果表明,当考虑弹簧m时,系统不可能同时处于平衡位置.

t=1/4T,弹簧的质量很大时(取m/M=10),ω_n所对应的波动特性如图5所示.随着ω阶次的不断增加,振幅的大小先增加,在n=4处,振幅达到最大,之后随着n的增加振幅减小.因此,n=4之后,高阶模对波动的影响会逐渐减弱.在t=1/4T时,对于1阶模来说,弹簧各个点应处于平衡位置,但实际情况还是偏离平衡位置,因此,1阶模对波动的影响很弱.



注:1~7代表1~7级振动模式; 1-2、1-3和1-7分别为1至2、3和7级振动叠加.

图 3　弹簧振子不同时间的振动情况

(a)不同级叠加振动;(b)各级振动

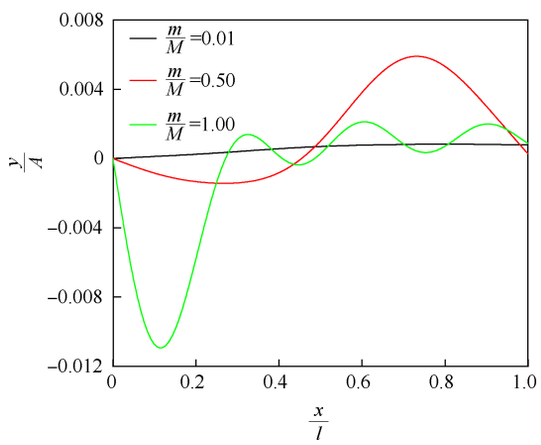


图 4　弹簧振子的波动特性

而对于其他阶模,当 t=1/4T 时,则弹簧各个点并未处于平衡位置.因此,在 t=1/4T 时,波动主要由 2~4 阶模决定.

当弹簧 m 很大时(取 m/M=10),系统经过 n 个 1/4T 与 n 个 3/4T 时,弹簧振子的波动如图 6 所示.弹簧运动 1/4、3/4、5/4 和 7/4 个周期时,弹簧都没有回到平衡位置,对于弹簧的每个点来说,振幅(大小和方向)都不相同,有的压缩,有的伸长.随着时间的增加,这种现象越来越明显.因此,对于 m 大的弹簧,振动与简谐振动有了很大的区别,各个点的运动不能完全重复上个周期的运动.

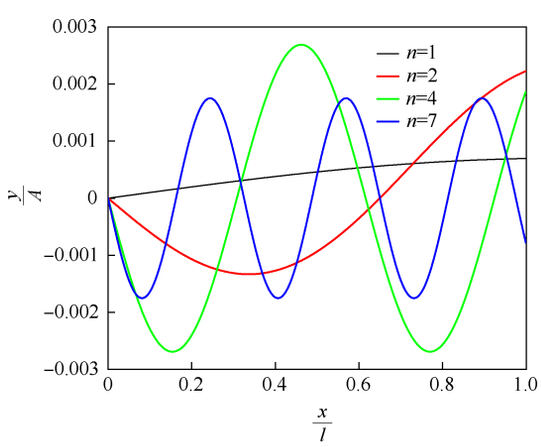


图 5　各级振动模式 ω_n 所对应的波动特性

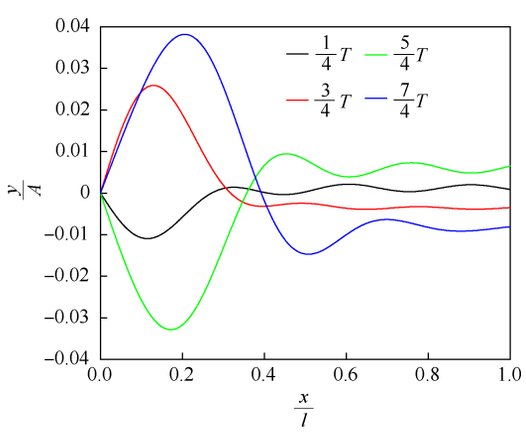


图 6　不同周期弹簧振子的波动

4　结　论

本文讨论了大质量弹簧的振动特性以及体系的波动特性.通过求解超越方程,得到体系的本征频率,结果表明:本征频率仅与 m/M 有关.m/M 越大,ω 越大,且 $\overline{\Delta\omega}$ 值增大.大约 m/M>2 之后,瑞利近似不再适用.振子的振动特性主要由 1 级分量决定,高阶分量对于振动特性的贡献不大;当考虑弹簧的 m 时,m 越大系统的振动就越复杂,弹簧无法同时处于平衡位置,并且不会重复上一周期的运动.

参 考 文 献

[1] 冯万盛,黄友剑,荣继刚,等.城轨车辆剪切型叠层橡胶弹簧稳定性研究[J].电力机车与城轨车辆,2010,33(6):13-16.
[2] 史力晨,王良曦,张兵志.基于弹簧振子理论的装甲车辆振动过程仿真[J].计算机仿真,2004,21(12):18-20.
[3] 郝丙飞,王红岩,芮强,等.坦克多体系统动力学建模及模型试验验证[J].中国机械工程,2018,29(4):429-433+440.
[4] 崔元德,徐延燕.弹簧-质点系统运动特点分析[J].河北大学学报(自然科学版),1993,13(3):93-100.
[5] LECLERC M.振动弹簧的有效弹性常数和有效质量:能量方法[J].李国强,译.大学物理,1990,9(6):10-11.
[6] 黄兆梁.弹簧质量对振动的影响[J].大学物理,1998,17(3):12-16.
[7] 罗蔚茵.关于弹簧振子固有频率的进一步讨论[J].大学物理,1985,4(11):9-11.
[8] 马葭生.用最优化及多元线性回归方法总结弹簧振子周期经验公式[J].物理实验,1986,6(1):4-6.
[9] 孙春峰.弹簧的质量、材料及其几何性质对弹簧谐振子角频率的影响[J].大学物理,1993,12(12):20-21.
[10] 刘大鹏,关荣华.弹簧质量对弹簧谐振子圆频率的影响[J].大学物理,1995,14(10):22-24.
[11] NUNES DA SILVA J M.负荷弹簧的重整化振动研究[J].孙厚谦,洪林,译.大学物理,1995,14(10):28-30+24.
[12] 杨建宋.有质量弹簧振子的振动周期分析[J].杭州师院学报(自然科学版),1985(2):69-75.
[13] 谢利民.弹簧振子运动的实际动力学分析[J].上海师范大学学报(自然科学版),2002,31(2):91-95.
[14] 丁履成,司明扬.有质量的弹簧的振动问题[J].大学物理,1985,1(9):15-19.
[15] 漆安慎,杜婵英.普通物理学教程·力学[M].北京:高等教育出版社,2005:342-343.
[16] 赵凯华,罗蔚茵.力学[M].北京:高等教育出版社,2012:289-291.
[17] 同济大学应用数学系.高等数学(下册)[M].5版.北京:高等教育出版社,2002:238-241.
[18] 梁昆森.数学物理方法[M].4版.北京:高等教育出版社,2010:169-331.

Influence of spring mass on vibration and wave characteristics

YANG Jingran, ZHAO Liming, ZHOU Yunsong, WEI Gongmin

(Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract: The vibration frequency, vibration mode and wave propagation characteristics of the oscillator system are discussed when the spring mass is considered. The vibration characteristics of the vibrator are mainly determined by the first-order vibration mode for the spring with great mass. When the spring mass is considered, the motion of each point cannot completely repeat the motion of the previous cycle, which indicates that the spring vibrator is not pure harmonic vibration.

Keywords: spring; mass; frequency; vibration

(责任编辑:兰丽丽)