物点通过空气与水的界面折射成像的性质及位置特点分析

邵　云

(南京晓庄学院电子工程学院,江苏 南京　211171)

摘要:介绍了像散光束的子午像点与弧矢像点的概念,详细分析了从空气中观察水下物体得到的是子午虚像,反之则是弧矢虚像的根本原因. 利用已有的光学知识分别计算水和空气中物点的虚像位置,并分析了两者随视角的变化情况. 指出在水下只能通过水面上的 1 个由折射临界角所决定的圆形窗口来观察水面上方的世界. 计算并分析了从水面下方附近所看到的高楼及其各楼层的虚像高度,指出眼睛观察虚像与镜头观察的本质区别. 文章可为相关内容的教学提供参考.

关键词:子午像;弧矢像;像点;人眼;焦线

中图分类号:O435. 1　　**DOI**:10. 19789/j. 1004-9398. 2020. 02. 004

0　引　言

从空气和水中(须在眼前放置 1 个 20 倍以上的高倍放大镜以抵消眼球角膜前的水凹透镜的影响)相互观察物点时,会存在 2 个虚像,即子午像点和弧矢像点,严格说是 2 条极短的、相互垂直的焦线,即子午焦线和弧矢焦线,两者在目光的方向上相互重叠并一前一后排列,形成像散[1-2]. 在理论上,2 个像点越近则像散越小,焦线越短,物点看得越清楚;反之则反. 像散影响着人眼的聚焦,而焦线长度则影响着虚像在焦线方向上的清晰度[3]. 但实际上,对人眼的近轴细光束成像系统而言,除接近临界折射的大视角情形外,焦线通常都是极短的. 因此对人眼而言,物体的子午、弧矢这 2 个虚像在理论上的清晰度通常应是较高的. 然而,这 2 个虚像在视线的方向上又几乎是完全重叠的,前一个始终掩盖住后一个,且在通常的斜视角下两者相距又较远,因此观察者的目光只能聚焦于前者,而无法透视看到后者,即后面的虚像被完全无视了. 本文将利用这些结论和已有的光学知识,分别计算从空气中观察水中以及从水中观察空气中物点的虚像位置,并将后者应用于水下观察岸上高楼的虚像分析,同时从实验与理论 2 个方面论证上述结论.

收稿日期:2018-10-23

1　细像散光束的子午像点和弧矢像点

姚启钧的《光学教程》[1]指出,当某均匀介质中的点光源发出的单心光束通过界面折射到另一种介质后,其单心性将被破坏,变成像散光束. 但在此(细)像散光束的反向延长线上仍有 2 个焦点(实质是极短的焦线),分别称为子午像点与弧矢像点,见图 1 和 2,都相当于点光源的虚像.

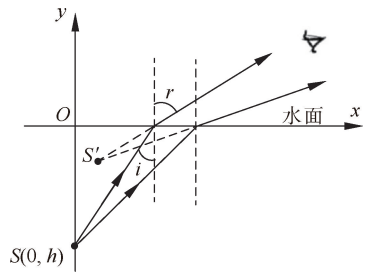


图 1　子午虚像点

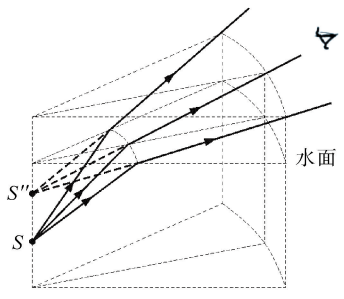


图 2　弧矢虚像点

图 1 中的 $O-xy$ 平面称作子午面,在该平面中若干相邻的折射光线的反向延长线大致汇于一点,即该图中 S', 称作物点 (S) 的子午像点;而图 2 中来自同一出射圆锥面(即弧矢面)的折射光线的反向延长线将严格地汇于该图中 S'' 点,称作 S 的弧矢像点. 从水中观察空气中的物点亦然. 由于人眼的瞳孔很小,且只能接收少数相邻的折射光线,并且晶状体前面和后面的曲率半径分别只有 10 和 6 mm[1],而瞳孔的直径一般在 4 mm 左右. 因此,光学中的近轴成像条件决定了最终实际参与成像的有效入射光束的半径要比瞳孔的半径小得多,人眼看到的有效半径决定的子午、弧矢焦线实际上都是极短的,而且随着观察者的后退,焦线变得更短. 于是,人眼中物体的子午、弧矢 2 个虚像便有了较高的清晰度(大视角观察除外). 这显然有别于普通的大口径物镜成实像的情形,譬如凸透镜、镜头组、望远镜等.

2 水中物点在空气中所成的子午虚像

由图 1 和 2 可见,水中的子午像点比弧矢像点更靠近观察者,因此人眼观察到的是近处的子午像点,而其后的弧矢像点则被无视了. 如图 1 所示观察者看到水里的鱼只能是鱼的子午虚像,其在鱼的右上方,比鱼的实际位置更靠近观察者且更浅. 当然,在不同的观察视角(即图 1 中的折射角 r) 下鱼像或子午像点的位置是不同的. 文献[4]中作者设法巧解出水中物点的子午像点坐标

$$x = h(n^2-1)\tan^3 i, \tag{1}$$

$$y = -\frac{h}{n}[1-(n^2-1)\tan^2 i]^{\frac{3}{2}}, \tag{2}$$

从而得到像点随视角变化的轨迹方程

$$y = -\frac{[h^{\frac{2}{3}}-(n^2-1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{2}}}{n}, \tag{3}$$

进而作出如图 3 所示的像点轨迹. 其中已设 S (或鱼)的深度 (h) 为 1 m, 水的折射率 (n) 为 $\frac{4}{3}$. 图中像点的最大深度 (h/n) 为 0.75 m, 称作像似深度,对应于视角 (r) 为 0.

3 空气中物点在水中所成的弧矢虚像

从水中观察空气中的物体,其子午虚像的位置见图 4. S' 处在 y 轴左侧这一点,可从文献[1]所给出的水下观察空气中物点的子午像点公式:

$$x = -h\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\tan^3 i, \tag{4}$$

$$y = nh\left[1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\tan^2 i\right]^{\frac{3}{2}} \tag{5}$$

来判断,显然有 $x<0$. 然而,这时的弧矢像点(图中未画出)却依然处在折射光线与 y 轴的交点处. 可见,这时是弧矢像点在前而子午像点在后,因此在水下只能观察到前面的弧矢像点,而观察不到后面的子午像点. 弧矢像点位于 S 的正上方,由几何知识可得其距离水面的高度

$$y = \frac{h\tan i}{\tan r}, \tag{6}$$

利用折射定律 $\sin i = n\sin r$ 可将式(6)整理成

$$y = \frac{n\cos r}{\sqrt{1-n^2\sin^2 r}}h. \tag{7}$$

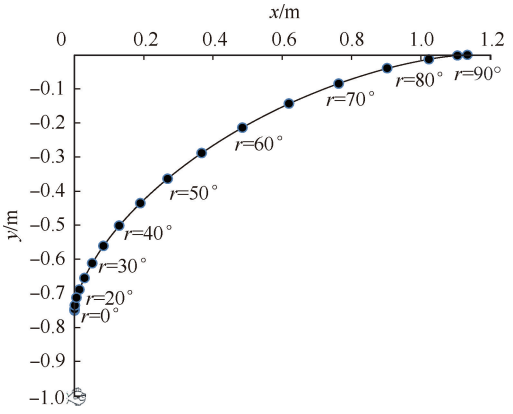


图 3 水下 1 m 处鱼的子午虚像位置随视角的变化

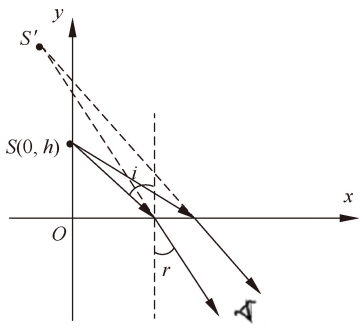


图 4 从水中观察空气中物点的子午虚像

当 S 的高度 h 给定时,从式(7)可作出像点坐标 y 随视角 r 的变化图,见图 5,这里依然设 $h=1$ m, $n=\frac{4}{3}$. 由图 5 及式(7)可知,当 $r=0$ 即从物

点正下方的水中观察时,像点的高度最小,为 1.333h 即 nh,称为像似高度;像点高度(y)随视角(r)的增大而增大,在 r 接近全反射临界角 48.6°时会大幅增加.当然,虽然从视角上观察 y 在临界角附近增加得确实突兀,但若从观察者距离物点的水平距离来看,y 增加得没有那么迅速.

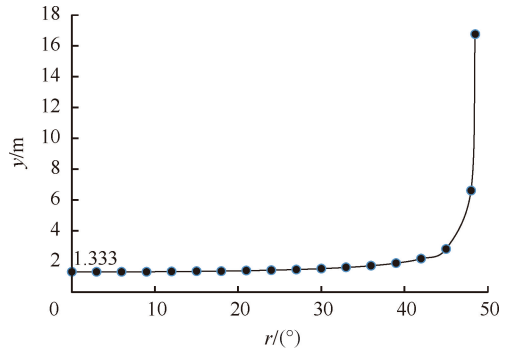


图 5　深度为 1 m 时弧矢像点的位置随视角的变化

4　水中视角下观察高楼

从水下向上观察(须在眼前放置 1 个高倍放大镜以抵消眼球角膜前的水凹透镜的影响),由于全反射的存在,只能通过水面上的 1 个由临界角所决定的圆形窗口来观察水面上的世界,确切地说,是拥挤在一个以临界角为半顶角的圆锥面内侧,由近及远地排列,并竖直向上耸立.

从水中观察岸边的一栋高楼及其各楼层的高度分布.设高楼有 20 层,楼层高度为 3 m,总高 60 m,矗立在游泳池边,人在泳池内距离高楼 20 m 处的水面下附近的视角观察,则观察到大楼高度(h)的虚像高度(y)可由式(6)得到.从水面下附近观察空气中 l 外 h 处物点虚像见图 6.

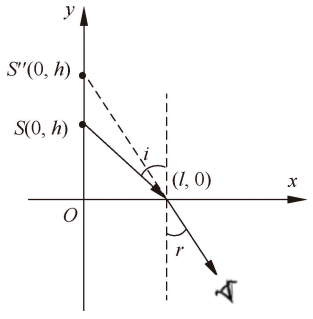


图 6　从水面下附近观察空气中 l 外 h 处物点的虚像

由图 6 可得

$$\tan i = \frac{l}{h}, \tag{8}$$

结合折射定律 $\sin i = n\sin r$ 及式(6)可得像点高度(y)随 h 及 l 变化的函数

$$y = \sqrt{n^2 h^2 + (n^2 - 1)l^2}, \tag{9}$$

这是弧矢像点 y 的另一表达式,其等价于式(6)和(7).由式(9)可见,在 h 一定时,y 随 l 稳定地增加.当 l 足够大时,y 将随 l 线性地增加.这一点不同于 y 随 r 的变化的原因在于线量与角量的差异,但其物理结果是一致的.从式(9)可见,当 l 给定时,楼底($h = 0$)的弧矢像高度为 $\sqrt{(n^2 - 1)l^2}$(注:地平线处物点的子午像点高度都是 ∞,且在 ∞ 远处,见式(4)和(5),即楼底在半空中).这是因为 y 在 0 ~ $\sqrt{(n^2 - 1)l^2}$ 这一段被全反射水面部分占据了.而楼顶的虚像高度则为 $\sqrt{n^2H^2 + (n^2 - 1)l^2}$,其中 H 设为大楼的实际高度,于是大楼虚像的上、下高度差即虚像楼高(H'')为

$$H'' = \sqrt{n^2H^2 + (n^2 - 1)l^2} - \sqrt{(n^2 - 1)l^2}, \tag{10}$$

由直角三角形知识知

$$H'' \leqslant nH, \tag{11}$$

且 H'' 随着 l 的增大而减小,直至→0.这就是说,当水下的观察者越远时,虽然大楼楼顶的虚像高度 $\sqrt{n^2H^2 + (n^2 - 1)l^2}$ 会越高,但大楼的 H'' 却越矮.

将 $l = 20$ m,$n = \frac{4}{3}$ 代入式(9)可得 y 随 h 变化的关系式

$$y = \sqrt{1.778\,h^2 + 311.1}, \tag{12}$$

将各楼层的 h 代入式(12),即得在水平距离 20 m 处的水面下所看到的各楼层的虚像高度,见图 7.可见水平地面的虚像高度为 $\sqrt{311.1}$ m≈17.6 m,各楼层的虚像高度将随楼层的增加而增加,但增速越来越缓.经计算可得水面上楼层的虚像高度近似为 3.9 m,如果楼层足够多,大楼足够高,则从式(9)可见水面上楼层的虚像高度将趋于定值 $n\Delta h$,即 4 m,其中 $\Delta h = 3$ m 为实际层高.由于远近的关系,从视觉上看,中部楼层仍要比上部楼层显得“高”.

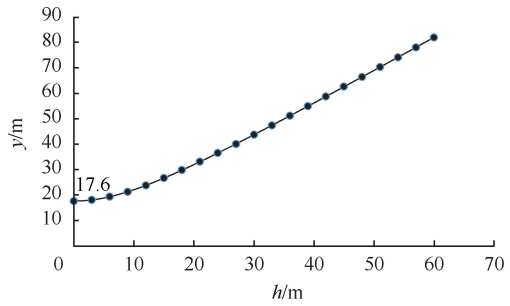


图 7 20 m 外水面下附近看 60 m 高楼各楼层的虚像高度

5 总结与说明

人眼从岸上观察水中的物体,看到的是其子午虚像,其在物体的上方且靠近观察者的一侧. 观察者越远,像越浅且向观察者移动,直到水面的折射临界点处.

人眼在水面下附近借助高倍放大镜观察岸上的物体(注:非为放大,实为抵消角膜前的水凹透镜),看到的是其弧矢虚像,其在物体的正上方. 观察者水平距离越远,像的顶部和底部的高度均越高,但两者的高度差即像本身的高度却越矮,直至→0,这与在空气中直接观察物体不同,于是在视觉上,水下观察岸上物体的虚像高度将随距离减少得更快,水下观察岸上风景的视野并不大,物象只是堆集在观察者头顶上方的一个顶角为 2 倍临界角的圆锥面内,水平地面折成了圆锥面,但树木、建筑却依旧竖直向上矗立. 从水中观察到的大楼各楼层的虚像高度随楼层而增加,但在视觉上则是中间楼层偏高,两头偏矮.

本文讨论的是人眼小瞳孔视觉中的虚像,而不是大口径光学镜头所拍到的实像. 人眼中的子午、弧矢焦线通常是极短的(大视角观察除外),而光学镜头下的焦线则相对很长. 人眼中的子午、弧矢虚像是完全重叠的, 故而只能看到近处的虚像,且焦线短,图像清晰;而光学镜头“眼”中的这 2 个虚像是不完全重叠的,焦线长,所拍图像模糊,需设法消散. 文献[3]中用望远镜观察水中物体的子午、弧矢虚像与用人眼直接观察在本质上是不同的,两者并不能相互替代.

利用近视或老花裸眼的明视距离去斜视装满水的脸盆底的文字,并对相应的视距进行测量,同时考虑到光线在水中的传播路程对明视距离的削减作用,便可验证看到的是近处的子午虚像的结论. 另外,从大视角方向观察脸盆底部的条形码,显示当条形码横向放置时观察得清晰,而竖向放置时则看得模糊,这就表明此时的横向子午短焦线对子午像清晰度的影响,同时也证明了所观察到的是子午像的结论.

不过,当人眼在近处从接近 90°的大视角方向观察水下细小的物体如点、线、文字的子午像时,较长的子午焦线会对子午像的清晰度构成严重的影响. 不仅导致虚像模糊,还导致人眼聚焦不准. 以至于在竖线、斜线皆因子午焦线而变得模糊的同时,横线也增粗、模糊,似有重影(由聚焦不准所致). 因此,在接近 90°的大视角方向近距离观察时,人们看到的是一个近似的子午虚像,此时人眼的聚焦存在少量偏差. 当然,若人眼在较远处或稍小的视角下观察,所看到的子午像在视觉上基本是清晰的,此时的子午焦线极短,远小于 1 mm. 水下观察水上物体的弧矢像情况与以上类似. 在水面下附近借助于高倍放大镜用裸眼观察岸上的物体,未见地平线处物体因其子午像在 ∞ 远处而导致图像不清的情形,这就基本证明了从水下看水上的物体时,看到的是其弧矢像的结论. 实际上,岸上的物体通常又高又大,物点的弧矢焦线长度完全可被忽略,因此弧矢像都比较清晰.

参 考 文 献

[1] 姚启钧. 光学教程[M]. 4 版. 北京:高等教育出版社,2008.

[2] 母国光,战元龄. 光学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2009.

[3] 罗琬华,牟林西. 观察子午象线和弧矢象线的实验[J]. 大学物理,1996,15(9):24 - 25.

[4] 邵云,窦瑾. 水中物点的虚像位置及其随视角的变化规律研究[J]. 大学物理,2018,37(8):29 - 30 + 43.

Analysis of the Nature and Location Characteristics of the Virtual Image of an Object Point Formed by the Refraction Light at the Interface of Air and Water

SHAO Yun

(School of Electronic Engineering, Nanjing Xiaozhuang College, Nanjing Jiangsu 211171)

Abstract: The concepts of meridional image point and sagittal image point of an astigmatic beam are introduced. The fundamental reason that the underwater object can be seen from air is meridional virtual image, and the opposite sagittal virtual image is analyzed in detail. The virtual image positions of objects in water and air are calculated by using the existing optical knowledge, and their changes with the view angle are analyzed. It is pointed out that the world above the water surface can only be observed through a circular window determined by the critical angle of refraction on the water surface. The virtual image heights of a tall building and its floors near the surface of water are calculated and analyzed. The essential difference between human eye and lens in observing virtual images is pointed out. The article can provide reference for the teaching of related contents.

Keywords: meridional image; sagittal image; image point; human eye; focal line