DOI：10.19789/j.1004-9398.2022.05.003
文献引用：石焕南，王东生．舒尔几何凸函数与一类条件不等式[J]．首都师范大学学报（自然科学版），2022，43（5）：16-20+76. SHI H N，WANG D S. Schur-geometrically convex function and a class of conditional inequalities [J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2022，43（5）：16-20+76.

舒尔几何凸函数与一类条件不等式

石焕南[1*]，王东生[2]

（1. 北京联合大学师范学院，北京　100011；2. 北京电子科技职业学院基础部，北京　100176）

摘要：受控理论是一门新兴数学学科，舒尔（Schur）凸函数是其核心概念，舒尔几何凸函数是舒尔凸函数的推广．变量乘积为定值的条件不等式是一类常见的不等式，本文利用舒尔几何凸函数证明了10个此类不等式，方法别样、简洁、有趣，还得到一些加强的结果．

关键词：舒尔几何凸函数；受控；条件不等式
中图分类号：O178

Schur-geometrically convex function and a class of conditional inequalities

SHI Huannan[1*]，WANG Dongsheng[2]

（1. Teacher's College，Beijing Union University，Beijing　100011；2. Basic courses department，Beijing Vocational College of Electronic Technology，Beijing　100176）

Abstract：Majorization theory is a new mathematical subject，Schur convex function is its core concept，and Schur geometrically convex function is the generalization of Schur convex function. The conditional inequalities in which the product of variables is constant are a common class of inequalities. In this paper，ten such inequalities are proved by Schur geometrically convex function. The method is different，concise and interesting，and some strengthened results are obtained.

Keywords：Schur geometrically convex function；majorization；conditional inequality
CLC：O178

0　引　言

20世纪70年代末，加拿大数学家Marshall和美国数学家Olkin合作出版了专著[1]，这标志着受控理论（也称控制不等式理论）成为数学的一门新的独立学科．恰时，在美国加州大学做访问学者的北京师范大学的王伯英教授学习了这一理论．回国后率先在国内开设了相关的硕士研究生课程，并于1990年编著出版了《控制不等式基础》[2]一书，该书精选了专著[1]中的经典基础理论，并补充了不少王伯英教授的创新内容，在应用部分，该书偏重讨论了受控理论在矩阵方面的应用．王伯英教授这本专著的出版极大地促进了我国控制不等式理论研究的发展，我国学者在国内外已发表了300多篇该领域的研究论文[3-22]，其中近百篇被SCI收录，形成了一支在国际上令人瞩目的研究队伍[23-24]．2011年，文献[25]引用了不少国内学者的论文．

舒尔（Schur）凸函数是受控理论的核心概念，关

收稿日期：2021-08-16
* 通信作者：shihuannan2014@qq.com

于舒尔凸函数的推广,国内学者做了不少开拓性的工作.2003年,张小明首先提出并建立了舒尔几何凸函数的定义及判定定理,并将其对舒尔几何凸函数的研究成果写入其专著[26]和[27].本文将利用舒尔几何凸函数证明变量乘积为定值的10个条件不等式.这是一类常见的不等式,其证明灵活多样.古典的拉格朗日乘子算法是一种常用的方法,但这种方法涉及极值点的存在性和唯一性的判断,往往操作起来很麻烦,而利用舒尔几何凸函数的证明方法别样、简洁、有趣,常常还可以得到一些加强的结果.

1　预备知识

在本文中,$\mathbf{R}^n$、$\mathbf{R}_+^n$和$\mathbf{R}_{++}^n$分别表示n维实数集、n维非负实数集和n维正实数集,并记$\mathbf{R}^1=\mathbf{R}$,$\mathbf{R}_+^1=\mathbf{R}_+$和$\mathbf{R}_{++}^1=\mathbf{R}_{++}$.

定义1[1-2]　设$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$和$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$.若

$$\sum_{i=1}^{k}x_{[i]}\leqslant\sum_{i=1}^{k}y_{[i]},\quad k=1,2,\cdots,n-1,\tag{1}$$

且

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i,\tag{2}$$

则称$\boldsymbol{x}$被$\boldsymbol{y}$所控制,记作$\boldsymbol{x}\prec\boldsymbol{y}$.又若$\boldsymbol{x}$不是$\boldsymbol{y}$的重排,则称$\boldsymbol{x}$被$\boldsymbol{y}$严格控制,记作$\boldsymbol{x}\prec\prec\boldsymbol{y}$.

引理1[1-2]　设$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$,则

$$(\bar{x},\cdots,\bar{x})\prec(x_1,\cdots,x_n).\tag{3}$$

定义2[1-2]　设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$,$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}$,若对于任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$,有$\boldsymbol{x}\prec\boldsymbol{y}\Rightarrow\varphi(\boldsymbol{x})\leqslant\varphi(\boldsymbol{y})$,则称$\varphi$为$\Omega$上的舒尔凸函数;简称为S-凸函数.若在$\Omega$上$\boldsymbol{x}\prec\prec\boldsymbol{y}\Rightarrow\varphi(\boldsymbol{x})<\varphi(\boldsymbol{y})$,则称$\varphi$为$\Omega$上严格S-凸函数.若$-\varphi$是$\Omega$上的(严格)S-凸函数,则称$\varphi$为$\Omega$上的S-凹(严格S-)凹函数.

定理1[1-2]　设区间$I\subset\mathbf{R}$,若f是I上的凸(凹)函数,则$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$是I^n上的S-凸(S-凹)函数.

定理2[1-2]　设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$是有内点的对称凸集,$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}$在$\Omega$上连续,在$\Omega$的内部$\Omega^\circ$可微,则$\varphi$在$\Omega$上S-凸(S-凹)$\Leftrightarrow\varphi$在$\Omega$上对称,且对于任意的$\boldsymbol{x}\in\Omega^\circ$,有

$$(x_1-x_2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\geqslant 0(\leqslant 0).\tag{4}$$

式(4)称为舒尔条件.

定义3[26-27]　设$\Omega\subset\mathbf{R}_{++}^n$,$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}$.

(a)若对于任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$,总有$(x_1^\alpha y_1^\beta,\cdots,x_n^\alpha y_n^\beta)\in\Omega$,则称$\Omega$是几何凸集,其中$\alpha,\beta\in[0,1]$且$\alpha+\beta=1$.

(b)对于任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$,若$\ln\boldsymbol{x}=(\ln x_1,\cdots,\ln x_n)<(\ln y_1,\cdots,\ln y_n)=\ln\boldsymbol{y}\Rightarrow\varphi(\boldsymbol{x})\leqslant\varphi(\boldsymbol{y})$,则称$\varphi$为$\Omega$上的舒尔几何凸函数,亦称舒尔乘积凸函数,简记为S-几何凸函数;若$-\varphi$是Ω上S-几何凸函数,则称φ为Ω上S-几何凹函数.

定理3[26-27]　设$\Omega\subset\mathbf{R}_{++}^n$,$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}_{++}$,$\ln\Omega=\{\ln\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}\in\Omega\}$,则$\varphi$为$\Omega$上S-几何凸(S-凹)函数当且仅当$\varphi(\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}})=\varphi(\mathrm{e}^{x_1},\cdots,\mathrm{e}^{x_n})$为$\ln\Omega$上S-凸(S-凹)函数.

借助于定理2,证得如下S-几何凸函数的判定定理.

定理4[26-27]　设$\Omega\subset\mathbf{R}_{++}^n$是有内点的对称对数凸集,$\varphi:\Omega\to\mathbf{R}_+$于$\Omega$上连续,在$\Omega$的内部$\Omega^\circ$一阶可微,则$\varphi$在$\Omega$上S-几何凸(S-凹)的充要条件是$\varphi$在$\Omega$上对称,且对于任意的$\boldsymbol{x}\in\Omega^\circ$,有

$$(x_1-x_2)\left(x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\geqslant 0(\leqslant 0).\tag{5}$$

2　主要结果及其证明

命题1(国际数学奥林匹克竞赛预选题1988)若$x_1,\cdots,x_n$均是大于1的实数,证明

$$\frac{1}{1+x_1}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}}.\tag{6}$$

证明　令$f(t)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$,$t>1$,则$f'(t)=\frac{-\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$,$f''(t)=\frac{\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^t-1)}{(1+\mathrm{e}^t)^3}\geqslant 0$,$f(t)$在$\mathbf{R}_{++}$上凸,进而$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x_1}}+\cdots+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x_n}}$在$\mathbf{R}_{++}^n$上S-凸,据定理3,$\varphi(\boldsymbol{x}):=\frac{1}{1+x_1}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}$在$(1,+\infty)^n$上S-几何凸,从而结合

$$(\ln\sqrt[n]{x_1\cdots x_n},\cdots,\ln\sqrt[n]{x_1\cdots x_n})<(\ln x_1,\cdots,\ln x_n),$$

即得不等式(6).

注1　也可以利用定理4证明$\varphi(\boldsymbol{x})$在$(1,+\infty)^n$上S-几何凸性,事实上,

$$\left(x_1-x_2\right)\left(x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)=$$

$$\left(x_1-x_2\right)\left(\frac{-x_1}{(1+x_1)^2}-\frac{-x_2}{(1+x_2)^2}\right)=$$

$$\left(x_1-x_2\right)^2\frac{x_1x_2-1}{(1+x_1)^2(1+x_2)^2}\geqslant 0.$$

由于$x_1,\cdots,x_n$均是大于1的实数,有

$$\left(\ln x_1,\cdots,\ln x_n\right)<\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,0,\cdots,0\right)=$$

$$\left(\ln\left(x_1\cdots x_n\right),\ln 1,\cdots,\ln 1\right),$$

从而

$$\frac{1}{1+x_1}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\leqslant\frac{1}{1+x_1\cdots x_n}+\frac{n-1}{2},\quad(7)$$

得到式(6)一个上界估计.

命题2 (1989年全国高中数学联赛试题)设整数$n\geqslant 2$,若$x_i\in\mathbf{R}_{++}$,$i=1,\cdots,n$,满足$\prod_{i=1}^{n}x_i=1$,求证

$$\prod_{i=1}^{n}(2+x_i)\geqslant 3^n.\quad(8)$$

证明 令$f(x)=\ln(2+\mathrm{e}^x)$,则$f''(x)=\frac{2\mathrm{e}^x}{(2+\mathrm{e}^x)^2}\geqslant 0$,$f(x)$在$\mathbf{R}$上凸,进而$\sum_{i=1}^{n}\ln(2+\mathrm{e}^{x_i})$在$\mathbf{R}^n$上S-凸,据定理3,$\sum_{i=1}^{n}\ln(2+\mathrm{e}^{x_i})$在$\mathbf{R}_{++}^n$上S-几何凸,从而由

$$\left(\ln\sqrt[n]{x_1\cdots x_n},\cdots,\ln\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\right)<\left(\ln x_1,\cdots,\ln x_n\right)$$

有

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(2+x_i)\geqslant n\ln\left(2+\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\right)=n\ln(2+1),$$

由此得证.

类似地,可以证明如下命题:

命题3 设$x_i>0$,$i=1,\cdots,n$,满足$\prod_{i=1}^{n}x_i=1$,对于任意$a>0$,有

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a+x_i\right)\geqslant(a+1)^n.\quad(9)$$

命题4(Mathematical Reflections 5 2020) 设实数a,b满足$ab\geqslant 1$,证明

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\geqslant\frac{2}{ab+1}.\quad(10)$$

证明 由$ab\geqslant 1$知a,b同号,不妨设$a>0,b>0$,令

$$\varphi(a,b)=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1},$$

则

$$\Lambda:=(a-b)\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial a}-b\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)=$$

$$\frac{2(a-b)^2(a+b)(a^2b^2-1)}{(a^2+1)^2(b^2+1)^2}\geqslant 0,$$

据定理4知,$\varphi(a,b)$在$(0,+\infty)^2$上S-几何凸,由

$$\left(\ln\sqrt{ab},\ln\sqrt{ab}\right)<(\ln a,\ln b)$$

得

$$\varphi(a,b)\leqslant\varphi\left(\sqrt{ab},\sqrt{ab}\right),$$

由此得证.

类似地,可以证明如下命题.

命题5(Mathematical Reflections 5 2020) 设实数a,b满足$ab\geqslant\frac{1}{3}$,证明

$$\frac{1}{3a^2+1}+\frac{1}{3b^2+1}\geqslant\frac{2}{3ab+1}.\quad(11)$$

命题6[28] $a,b,c\in(0,1]$,则有

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}}.\quad(12)$$

证明 令

$$\varphi(a,b,c)=\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}},$$

则

$$\Lambda:=(a-b)\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial a}-b\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)=$$

$$(a-b)\left[\frac{-a}{(1+a)^{\frac{3}{2}}}-\frac{-b}{(1+b)^{\frac{3}{2}}}\right],\quad(13)$$

记

$$f(x)=\frac{-x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}},$$

则

$$f'(x)=-(1+x)^{\frac{3}{2}}\left[1-\frac{3x}{2(1+x)}\right],\quad(14)$$

易见当$x\in(0,2]$时,$f'(x)\leqslant 0$,从而$\Lambda\leqslant 0$.据定理4,$\varphi(a,b,c)$在$(0,2]^3$上S-几何凹,由

$$\left(\ln\sqrt[3]{abc},\ln\sqrt[3]{abc},\ln\sqrt[3]{abc}\right)<(\ln a,\ln b,\ln c)$$

得

$$\varphi(a,b,c)\leqslant\varphi\left(\sqrt[3]{abc},\sqrt[3]{abc},\sqrt[3]{abc}\right),$$

由此得证.

注2 由证明过程可见,条件$a,b,c\in(0,1]$可放宽为$a,b,c\in(0,2]$.又由式(14)知,当$x\geqslant 2$时,

$f'(x)\geqslant 0$,从而由式(13)知$\Lambda\geqslant 0$,这意味着$\varphi(a,b,c)$在$[2,+\infty)^3$上S-几何凸,于是所证不等式(12)反向成立.

命题7[29]　若$x,y\in\mathbf{R}_{++}$,满足$xy=1$,且$\lambda\leqslant 4$,则

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{\lambda}{x+y}\geqslant 2+\frac{\lambda}{2}. \tag{15}$$

证明　令$\varphi(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{\lambda}{x+y}$,不难算得

$$\Lambda:=(x-y)\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=$$

$$(x-y)^2\left[\frac{1}{xy}-\frac{\lambda}{(x+y)^2}\right]\geqslant$$

$$(x-y)^2\left[\frac{1}{xy}-\frac{4}{(x+y)^2}\right]\geqslant 0,$$

故$\varphi(x,y)$在$\mathbf{R}_{++}^2$上S-几何凸,结合

$$\left(\ln\sqrt{xy},\ln\sqrt{xy}\right)\prec(\ln x,\ln y)$$

有

$$\varphi(x,y)\geqslant\varphi\left(\sqrt{xy},\sqrt{xy}\right)=\varphi(1,1),$$

由此得证.

命题8(2020年马其顿奥数试题)　对于$x,y\geqslant 0$,$xy=1$,证明

$$(x+y+1)(x^2+y^2)+\frac{4}{x+y}\geqslant 8. \tag{16}$$

证明　令

$$\varphi(x,y)=(x+y+1)(x^2+y^2)+\frac{4}{x+y},$$

则

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x}=x^3+xy^2+2x^2(x+y+1)-\frac{4x}{(x+y)^2},$$

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^2y+y^3+2y^2(x+y+1)-\frac{4y}{(x+y)^2},$$

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\frac{\partial\varphi}{\partial y}=(x^3-y^3)+xy(y-x)+$$

$$2(x^2-y^2)(x+y+1)-\frac{4x}{(x+y)^2}+\frac{4y}{(x+y)^2},$$

于是

$$\Lambda:=(x-y)\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=$$

$$\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}\left[(x+y)^2(x^2+y^2)+2(x+y)^3(x+y+1)-4\right]\geqslant$$

$$\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}\left[(x+y)^2(x^2+y^2)+2(x+y)^4-4\right]\geqslant$$

$$\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}\left[(x+y)^2(x^2+y^2)+2\left(2\sqrt{xy}\right)^4-4\right],$$

由条件$xy=1$知$\Lambda\geqslant 0$,故$\varphi(x,y)$在$U=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0,xy=1\}$上S-几何凸,由

$$\left(\ln\sqrt{xy},\ln\sqrt{xy}\right)\prec(\ln x,\ln y),$$

有

$$\varphi(x,y)\geqslant\varphi\left(\sqrt{xy},\sqrt{xy}\right)=\varphi(1,1),$$

由此得证.

命题9[29]　设$a,b,c,d>0$且$abcd=1$,$k\in\mathbf{R}$,$k\geqslant 2$,则

$$\frac{1}{(1+a)^k}+\frac{1}{(1+b)^k}+\frac{1}{(1+c)^k}+\frac{1}{(1+d)^k}\geqslant\frac{4}{2^k}. \tag{17}$$

证明　令$f(x)=\dfrac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^k}$,则对于任意$k\geqslant 1$,有

$$f'(x)=\frac{-k\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^{k+1}},$$

$$f''(x)=\frac{-k\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)^k(1-k\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^{2(k+1)}}\geqslant 0,$$

$f(x)$在$\mathbf{R}_{++}$上凸,进而

$$\frac{1}{(1+\mathrm{e}^a)^k}+\frac{1}{(1+\mathrm{e}^b)^k}+\frac{1}{(1+\mathrm{e}^c)^k}+\frac{1}{(1+\mathrm{e}^d)^k}$$

在$\mathbf{R}_{++}^n$上S-凸,据定理3,

$$\frac{1}{(1+a)^k}+\frac{1}{(1+b)^k}+\frac{1}{(1+c)^k}+\frac{1}{(1+d)^k}$$

在$\mathbf{R}_{++}^n$上S-几何凸,从而由

$$\left(\ln\sqrt[4]{abcd},\ln\sqrt[4]{abcd},\ln\sqrt[4]{abcd},\ln\sqrt[4]{abcd}\right)\prec$$
$$(\ln a,\ln b,\ln c,\ln d)$$

有

$$\frac{1}{(1+a)^k}+\frac{1}{(1+b)^k}+\frac{1}{(1+c)^k}+\frac{1}{(1+d)^k}\geqslant$$
$$4\cdot\frac{1}{\left(1+\sqrt[4]{abcd}\right)^k}=\frac{4}{2^k}.$$

注3　从证明过程可见,条件中的$k\geqslant 2$可放宽为$k\geqslant 1$.

命题10(2010年摩尔多瓦国家集训队试题)　已知$x_1,\cdots,x_n$为正数,且$x_1\cdots x_n=1$,证明

$$\frac{1}{x_1(x_1+1)}+\frac{1}{x_2(x_2+1)}+\cdots+\frac{1}{x_n(x_n+1)}\geqslant\frac{n}{2}. \tag{18}$$

证明　令

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{x_1(x_1+1)}+\frac{1}{x_2(x_2+1)}+\cdots+$$

$$\frac{1}{x_n(x_n+1)},$$

则

$$\Lambda:=(x_1-x_2)\left(x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)=$$
$$(x_1-x_2)\left[g(x_1)-g(x_2)\right],$$

其中

$$g(x)=-\frac{2x+1}{x(x+1)^2}.$$

由于

$$g'(x)=$$
$$-\frac{2x(x+1)^2-(2x+1)\left[(x+1)^2+2x(x+1)\right]}{x^2(x+1)^4}=$$
$$-\frac{-4x^2-3x-1}{x^2(x+1)^3}\geqslant 0,$$

故 $\Lambda\geqslant 0$,这意味着 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\mathbf{R}_{++}^n$ 上 S-几何凸,因

$$\left(\ln\sqrt[n]{x_1\cdots x_n},\cdots,\ln\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\right)<(\ln x_1,\cdots,\ln x_n),$$

故

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)\geqslant\varphi\left(\sqrt[n]{x_1\cdots x_n},\cdots,\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\right)=$$
$$\varphi(1,\cdots,1)=\frac{n}{2},$$

由此得证.

3 结束语

渗入到众多数学领域的控制不等式,处处扮演着精彩角色,原因是其常能深刻地描述诸多数学量之间的内在联系,从而便于推导所需的结论;其还具有“成批”生产不等式的能力,即用一种统一的方法,把许多已有的从不同方法得来的不等式简便地推导出来,是推广和发现不等式的强有力手段,读者通过此文可领略一二.

参 考 文 献

[1] MARSHALL A M, OLKIN I. Inequalities: theory of majorization and its application [M]. New York: Academies Press, 1979.

[2] 王伯英.控制不等式基础[M].北京:北京师范大学出版社,1990.

[3] 吴善和,石焕南.一类无理不等式的控制证明[J].首都师范大学学报(自然科学版),2003,24(3):13-16.

[4] 石焕南,张鉴,徐坚.一类积分不等式的控制证明[J].首都师范大学学报(自然科学版),2004,25(4):11-13.

[5] 石焕南.国内舒尔凸函数研究综述[J].广东第二师范学院学报,2017,37(5):6-12.

[6] SHI H N, WU S H. Schur convexity of the dual form of complete symmetric function involving exponent parameter [J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2020, 44: 836-845.

[7] 石焕南,王飞,王东生.一个三角不等式的控制证明与推广[J].广东第二师范学院学报,2020,40(3):12-16.

[8] SHI H N, WANG P, ZHANG J. Schur-convexity for compositions of complete symmetric function dual [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2020, 2020: 65.

[9] WANG D S, FU C R, SHI H N. Schur-*m* power convexity of Cauchy means and its application [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematic, 2020, 50(5): 1859-1869.

[10] WANG D S, FU C R, SHI H N. Schur convexity of mixed mean of *n* variables involving three parameters [J]. Filomat, 2020, 34(11): 3663-3674.

[11] 石焕南.石焕南文集:受控理论与不等式研究[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2020.

[12] 王东生,付春茹,石焕南. Bonferroni平均的Schur凸性及应用[J].兰州理工大学学报,2019,45(5):153-158.

[13] QI F. A note on Schur-convexity of extended mean values [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2005, 35(5): 1787-1793.

[14] QI F, SÁNDOR J, DRAGOMIR S S, et al. Notes on the Schur-convexity of the extended mean values [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2005, 9(3): 411-420.

[15] GUAN K Z. Schur-convexity of the complete symmetric function [J]. Mathematical Inequalities & Applications, 2006, 9(4): 567-576.

[16] GUAN K Z, SHEN J H. Schur-convexity for a class of symmetric function and its applications [J]. Mathematical Inequalities & Applications, 2006, 9(2): 199-210.

[17] CHU Y M, WANG G D, ZHANG X H. Schur convexity and Hadamard's inequality[J]. Mathematical Inequalities & Applications, 2010, 13(4): 725-731.

[18] CHU Y M, ZHANG Y, QIU S L. Schur quadratic concavity of the elliptic Neuman mean and its application[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2014, 2014: 397.

[19] CHU Y M, XIA W F, ZHANG X H. The Schur concavity, Schur multiplicative and harmonic convexities of the second dual form of the Hamy symmetric function with

(下转第76页)

[11] LANGE V, PICOTTI P, DOMON B, et al. Selected reaction monitoring for quantitative proteomics: a tutorial [J]. Molecular Systems Biology, 2008, 4: 1-14.
[12] 赵焱,应万涛,钱小红.质谱MRM技术在蛋白质组学研究中的应用[J].生命的化学,2008,28(2):210-213.
[13] 王昕,田芳,张养军,等.基于质谱技术的蛋白质组定量方法[J].生命的化学,2011,31(1):134-140.
[14] 韩冰,王立顺.基于MRM-MS技术的蛋白质生物标志物研究的前景[J].中华检验医学杂志,2011,34(6):484-488.
[15] 王志鹏,王鑫,刘伟,等.串级质谱应用于蛋白质科学研究的实例介绍[J].化学教育,2017,38(12):1-6.
[16] 常乘,吴松峰,马洁,等.基于质谱的选择反应监测技术相关策略和方法的研究进展[J].生物化学与生物物理进展,2012,39(11):1118-1127.
[17] MCLNTOSH M, FITZGIBBON M. Biomarker validation by targeted mass spectrometry [J]. Nature Biotechnology, 2009, 27: 622-623.
[18] CHAMBERS A G, ERCY A J, SIMON R, et al. MRM for the verification of cancer biomarker proteins: recent applications to human plasma and serum [J]. Expert Review of Proteomics, 2014, 11(2): 137-148.
[19] KESHISHIAN H, BURGESS M W, GILLETTE M A, et al. Multiplexed, quantitative workflow for sensitive biomarker discovery in plasma yields novel candidates for early myocardial injury [J]. Molecular & Cellular Proteomics, 2015, 14(9): 2375-2393.
[20] MUNTEL J, XUAN Y, BERGER S T, et al. Advancing urinary protein biomarker discovery by data-independent acquisition on a quadrupole-orbitrap mass spectrometer [J]. Journal of Proteome Research, 2015, 14(11): 4752-4762.
[21] 曹东,张养军,钱小红.基于生物质谱的蛋白质组学绝对定量方法研究进展[J].质谱学报,2008,29(3):185-191.

(责任编辑:王 媛)

(上接第20页)

applications[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2012, 105(1): 412-421.
[20] XIA W F, CHU Y M. The Schur convexity of Gini mean values in the sense of harmonic mean [J]. Acta Mathematica Scientia, 2011, 31(3): 1103-1112.
[21] CHU Y M, WANG G D, ZHANG X H. The Schur multiplicative and harmonic convexities of the complete symmetric function [J]. Mathematische Nachrichten, 2011, 284(5/6): 653-663.
[22] CHU Y M, XIA W F, ZHAO T H. Schur convexity for a class of symmetric functions [J]. Science China Mathematics, 2010, 53: 465-474.
[23] MORITOH S, TANAKA Y. Comparison of integral and discrete Ostrowski's inequalities in the plane [J]. Mathematical Inequalities & Applications, 2015, 18(1): 125-132.
[24] SUDSUTAD W, NTOUYAS S K, TARIBOON J. Quantum integral inequalities for convex functions [J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2015, 9(3): 781-793.
[25] MARSHALL A M, OLKIN I, ARNOLD B C. Inequalities: theory of majorization and its application [M]. 2nd ed. New York: Springer, 2011.
[26] 张小明.几何凸函数[M].合肥:安徽大学出版社,2004.
[27] 张小明,褚玉明.解析不等式新论[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.
[28] 邹守文.几个无理不等式结论的推广[J].中学数学研究,2003(4):22-23.
[29] 蒋明斌.两道竞赛题的统一推广[J].中学教研(数学),2006(5):38.

(责任编辑:马田田)