DOI:10.19789/j.1004-9398.2015.05.001

C_3 型量子包络代数的 Gröbner-Shirshov 基

萨娜尔·胡马什 阿布都卡的·吾甫
(新疆大学数学与系统科学学院,乌鲁木齐 新疆 830046)

摘 要

在这篇文章中,我们用有限维代数的表示理论中的 Auslander-Reiten 理论和 Ringel-Hall 代数方法证明 C_3 型量子包络代数的所有根向量之间的拟交换关系构成它的一个极小 Gröbner-Shirshov 基.

关键词: Ringel-Hall 代数,不可分解模,拟交换关系,Gröbner-Shirshov 基.
中图分类号: O151; O152.5

1 引 言

在文献[1], [2], [3]中发展的 Gröbner-Shirshov 基理论已成为代数学中解决约化问题的重要工具之一. 最近几年 Gröbner-Shirshov 基理论在数学的其它分支中也得到了广泛的应用. 在[4]中作者给出了构造量子包络代数的 Gröbner-Shirshov 基的方法后,我们用代数表示论及 Ringel-Hall 代数方法构造了几种量子包络代数 Gröbner-Shirshov 基(见[7], [5], [6]). 在本文中我们首先用[8]中的 Frobenius 映射方法计算 C_3 型 Ringel-Hall 代数的根向量之间的拟交换关系,然后用 Ringel 的经典同构(也就是 Ringel-Hall 代数和相应类型的量子包络代数的正部分之间的同构映射)来得到 C_3 型量子包络代数的正部分的 Gröbner-Shirshov 基,最后用[4]中的方法给出了整个 C_3 型量子包络代数的极小 Gröbner-Shirshov 基.

2 预备知识

为了文章的完整性,在这一节里我们分别从文献[8], [9], [10]及[4]中回忆一些关于 Ringel-Hall 代数和量子包络代数的 Gröbner-Shirshov 基理论的一些基本概念和结果.

首先,我们从[9]和[10]中回忆量子包络代数的概念.

收稿日期:2014-04-30

设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $N\times N$ 阶可对称化的 Cartan 矩阵,也就是说 $a_{ii}=2$, $a_{ij}\leqslant 0(i\neq j)$,而且存在一个对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_N)$ 使得矩阵 DA 是对称矩阵,其中对角线元素 d_i 为非零整数. 设 k 是一个域,q 是此域中的一个非零元素,而且对每一个 i,我们设 $q^{4d_i}\neq 1$ 那么量子包络代数 $U_q(i)$ 是由 $4N$ 个生成元 $E_i,K_i^{\pm 1},F_i(1\leqslant i,j\leqslant N)$ 生成的,而且满足下列关系的 k -代数:

$$K=\{K_iK_j-K_jK_i,K_iK_i^{-1}-1,K_i^{-1}K_i-1,E_jK_i^{\pm 1}-q^{\pm d_ia_{ij}}K_i^{\pm 1}E_j,K_i^{\pm 1}F_j-q^{\pm d_ia_{ij}}F_jK_i^{\pm 1}\},$$

$$T=\left\{E_iF_j-F_jE_i-\delta_{ij}\frac{K_i^2-K_i^{-2}}{q^{2d_i}-q^{-2d_i}}\right\},$$

$$S^+=\left\{\sum_{\mu=0}^{1-a_{ij}}(-1)^{\mu}\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ \mu\end{bmatrix}_t E_i^{1-a_{ij}-\mu}E_jE_i^{\mu}\mid i\neq j,t=q^{2d_i}\right\},$$

$$S^-=\left\{\sum_{\mu=0}^{1-a_{ij}}(-1)^{\mu}\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ \mu\end{bmatrix}_t F_i^{1-a_{ij}-\mu}F_jF_i^{\mu}\mid i\neq j,t=q^{2d_i}\right\},$$

其中:

$$\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}_t=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{t^{m-i+1}-t^{i-m-1}}{t^i-t^{-i}}, & (\text{对 } m>n>0),\\ 1, & (\text{对 } n=0 \text{ 或 } n=m).\end{cases}$$

我们用 $U_q^0(A)$ 来表示 $U_q(A)$ 的由元素 $K_i^{\pm 1}(1\leqslant i\leqslant N)$ 生成的子代数. 同样,分别用 $U_q^+(A)$ 和 $U_q^-(A)$ 来表示 $U_q(A)$ 的由元素 $E_i(1\leqslant i\leqslant N)$ 和 $F_i(1\leqslant i\leqslant N)$ 生成的子代数. 这时,一个有名的结果是量子包络代数的以下三角分解定理(见[12])

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$U_q(A) \cong U_q^+(A) \otimes U_q^0(A) \otimes U_q^-(A)$$

其次,我们从 [8] 中回忆关于 Ringel-Hall 代数的一些概念和结果. 设 F 是一个有限域,$\vec{Q}$ 是一个以 Q 作为基础图的 Dynkin 型赋值图,也就是说 $Q \in \{A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2\}$,众所周知这时路代数 $\Lambda(\mathrm{F}, \vec{Q}) = \mathrm{F}\vec{Q}$(其定义见 [8]) 是一个有限维遗传 F - 代数. 我们用 $\Lambda(\mathrm{F}, \vec{Q})$ - mod 来表示有限维右 $\Lambda(\mathrm{F}, \vec{Q})$ - 模的范畴. 对 $M, N_1, \cdots, N_t \in \Lambda(\mathrm{F}, \vec{Q})$,设 $F^M_{N_1,\cdots,N_t}$ 是满足以下条件的过滤个数:

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_{t-1} \supseteq M_t = 0,$$

使得 $M_{i-1}/M_i \cong N_i$(对所有 $1 \leqslant i \leqslant t$).

对每一个 $M \in \Lambda(\mathrm{F}, \vec{Q})$ - mod,我们分别 M 和 dim [M] 用来表示 M 的同构类及其维数向量. 这时我们有著名的 Euler 型 $\langle -, - \rangle$ 其定义如下:

$$\langle \dim M, \dim N \rangle = \dim \mathrm{Hom}_{\Lambda(\mathrm{F}, Q\rightarrow)}(M, N) - \dim \mathrm{Ext}^1_{\Lambda(\mathrm{F}, Q\rightarrow)}(M, N)$$

注意,$(-, -)$ 是 $\langle -, - \rangle$ 的对称化,其中 $\langle -, - \rangle$ 的定义如下:

$$(\dim M, \dim N) = \langle \dim M, \dim N \rangle + \langle \dim N, \dim M \rangle$$

设 v 是一个不定远,$\mathrm{Q}(v)$ 是 v 在域 Q 上的有理函数域,而且我们设 $v^2 = q$. 为了定义 twisted generic Ringel-Hall 代数,我们回忆关于 Hall 多项式的概念.

对一个 Dynkin 图 Q,存在相应的半单李代数 g 和 Cartan 矩阵 A. 设 Φ^+ 是 g 的正根集. 从 [1] 我们可知 dim 是所有不可分解模的同构类的集合与 g 的正根 Φ^+ 之间的一个双射. 对每一个 $\alpha \in \Phi^+$,我们设 $M_{\mathrm{F}}(\alpha)$ 是对应的不可分解 $\Lambda(\mathrm{F}, \vec{Q})$ - 模; 因此有 $\dim M_{\mathrm{F}}(\alpha) = \alpha$. 由 Krull-Schmidt 定理,每一个 $\Lambda(\mathrm{F}, \vec{Q})$ - 模 M_{F} 同构于

$$M_{\mathrm{F}}(\lambda) = \bigoplus_{\alpha \in \varphi^+} \lambda(\alpha) M(\lambda)$$

其中 $\lambda: \varphi^+ \rightarrow N$ 是一个函数. 所以 $\Lambda(\mathrm{F}, \vec{Q})$ - 模的同构类可以由以下集合加有指标的:

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}(\vec{Q}) = \{\lambda \mid \lambda: \varphi^+ \rightarrow \mathrm{N}\},$$

此集合与有限域 F 无关. 为了保持一致性,我们把每一个 $\alpha \in \varphi^+$ 认为是一个函数 $\varphi^+ \rightarrow N, \beta \rightarrow \delta_{\alpha,\beta}$. 为了后面的需要,我们用 α_i 来表示 φ^+ 中的第 i 个单根,而且用 λ_i 来表示函数 $\varphi^+ \rightarrow N, \beta \rightarrow \delta_{\alpha_i,\beta}$ 对任意有限域 F 和 $\lambda, \mu \in B(\vec{Q})$,我们定义

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \langle \dim M_{\mathrm{F}}(\lambda), \dim M_{\mathrm{F}}(\mu) \rangle.$$

这时我们有:

定理 2.1 ([4]) 设 $\vec{Q}$ 是一个 Dynkin 型赋值图. 对任意 $\lambda, \mu, \rho \in \mathrm{B} = \mathrm{B}(\vec{Q})$,存在多项式 $\varphi^{\lambda}_{\mu,\rho}(T) \in Z(T)$,使得对任意有限域 F

$$\varphi^{\lambda}_{\mu,\rho}(|\mathrm{F}|) = F^{M_{\mathrm{F}}(\lambda)}_{M_{\mathrm{F}}(\mu), M_{\mathrm{F}}(\rho)}$$

成立. 这些多项式称为 Q 的 Hall 多项式.

现在我们可以定义 twisted generic Ringel-Hall 代数(见 [4]).

定理 2.2 $\vec{Q}$ 型 Dynkin 赋值箭图的 twisted generic Ringel-Hall 代数 $\mathrm{H}(\vec{Q})$ 是以 $\{\vartheta_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{B}(\mathrm{Q}\rightarrow)\}$ 为基的自由 Q 代数,其乘法定义如下:

$$\vartheta_\mu \vartheta_\rho = v^{\langle \mu, \rho \rangle} \sum_{\lambda \in \mathrm{B}(\mathrm{Q}\rightarrow)} \varphi^{\lambda}_{\mu,\rho}(v^2) \vartheta_\lambda.$$

代数 $\mathrm{H}(\Lambda)$ 是一个以 $1 = \vartheta_0$ 为单位元的结合代数,其中 0 是 $B(\vec{Q})$ 中的零函数.

从现在起,我们固定 $k = Q$ 和 $q = v^2$. 设 $\vec{Q}$ 是一个基础图为 Q 的 Dynkin 型赋值图,而且 g 和 A 分别是相应的半单 Lie 代数和 Cartan 矩阵. 那么 [4] 中的主要结果是

定理 2.3 ([4]) 映射 $\eta: U_q^+(\mathrm{g}) = U_q^+(A) \rightarrow \mathrm{H}(\vec{Q})$,$\eta(E_i) = \vartheta_{[i]}$ 是一个代数同构.

最后,我们从 [4] 中回忆一些关于 Gröbner-Shirshov 基的基本概念和结果.

设 X 是一组文字的非空集合,$\langle X \rangle$ 和 $k\langle X \rangle$ 分别是由 X 生成的有单位元 1 的自由半群和 k - 代数,其中 k 是一个域. 我们在 $\langle X \rangle$ 上取一个单项式序 $<$ 使得我们可以对每一个元素 $f \in k\langle X \rangle$,定义其首项 $\bar{f}$ 对每一个元素 $f \in k\langle X \rangle$,如果其首项 $\bar{f}$ 的系数为 $1 \in k$ 那么我们说元素 $f \in k\langle X \rangle$ 是首一元素. 对每一个首一元素对 $f, g \in k\langle X \rangle$ 如果我们能找到 $a, b \in \langle X \rangle$ 使得有 $\bar{f}a = b\bar{g} = \omega$,那么我们说元素 f 和 g 之间有交叉合成,其中 f 的总长度大于 b 的长度. 这时我们用 $(f, g)_\omega = fa - bg$ 来表示此合成,并且注意 $\overline{(f, g)_\omega} < \omega$,如果存在 $a, b \in \langle X \rangle$ 使得有 $\bar{f} = a\bar{g}b = \omega$ 那么我们说元素 f 和 g 之间有包含合成. 这时我们写 $(f, g)_\omega = f - agb$,并且再次注意首项小于 ω.

设 $S \subseteq k\langle X \rangle$ 是首一元素的集合,(S) 是由 S 生成的理想. 设 $p, q \in k\langle X \rangle$ 和 $\omega \in \langle X \rangle$ 我们在 $k\langle X \rangle$ 上如下定义一个等价关系:$p \equiv q \bmod (S; \omega)$ 当且仅当 $p - q = \sum \alpha_i a_i s_i b_i$,其中 $\alpha_i \in k$; $a_i, b_i \in \langle X \rangle$; s_i

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\in S;(\overline{a_i s_i b_i}) < \omega$. 如果对任意$f,g \in k\langle X\rangle$,只要合成$(f,g)_\omega$有定义时,我们就有

$$(f,g)_\omega \equiv 0 \bmod (S;\omega)$$

那么我们说S对合成封闭,并且在这种情况下我们把合成$(f,g)_\omega$说成是对S是平凡的. 如果S对合成不封闭,那么我们需要通过添加所有非平凡合成(归纳地)把S扩大,而得到S的完备化S^c. 如果S是完备的(也就是说对合成封闭),即$S^c = S$那么 Shirshov 引理(见[3])告诉我们任意首一元素$f \in (S)$都有可约首项$\bar{f} = a\bar{s}b$,其中$s \in S$且$a,b \in \langle X\rangle$. Shirshov 引理还告诉我们$\langle X\rangle$中的不可约单项式的集合构成商代数$k\langle S\rangle/(S)$的一组线性基(作为k上的向量空间).

这时集合S被认为是理想(S)的 Gröbner-Shirshov 基. 通常我们也可以把集合S称为商代数$k\langle S\rangle/(S)$的 Gröbner-Shirshov 基. 如果集合S的元素之间没有包含合成,那么集合S被称为极小 Gröbner-Shirshov 基.

关于量子包络代数的 Gröbner-Shirshov 基的一个主要结果是下面定理(见[4]).

定理 2.4　如果集合S^{+c}和S^{-c}分别是$U_q^+(A)$和$U_q^-(A)$的 Gröbner-Shirshov 基,那么集合$S^+ \cup K \cup T \cup S^-$是$U_q(A)$的极小 Gröbner-Shirshov 基.

3　C_3型量子包络代数的 Gröbner-Shirshov 基

在这一节我们要讨论C_3型量子包络代数的 Gröbner-Shirshov 基. 为此我们选取C_3的以下定向:

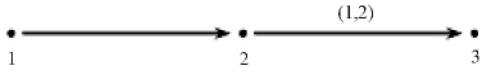


图 1

对应的 Cartan 矩阵A和极小对称化子D分别为:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

所以$\xi_1 = 1, \xi = 1_2, \xi_3 = 2$.

设U^0是由$K_1^{\pm 1}$和$K_2^{\pm 1}$生成的U的子代数,U^+(或者U^-)是由E_1,E_2和E_3(或者F_1,F_2和F_3)生成的U的子代数,那么我们有U的如下三角分解(见[10]):

$$U \cong U^+ \otimes U^0 \otimes U^-$$

赋值箭图C_3的 Auslander-Reiten 箭图有以下形式:

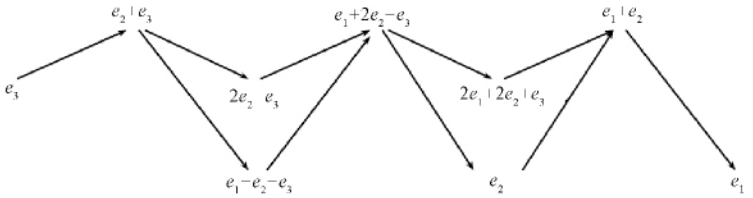


图 2

其中,箭头↗赋值(1,2),箭头↘赋值(2,1)设

$$X_1 = \langle [e_3] \rangle = v^{\frac{1}{2}(\dim e_3, \dim e_3) - \dim_k e_3} [e_3]$$

$$X_2 = \langle [e_2 + e_3] \rangle = v^{\frac{1}{2}(\dim(e_2+e_3), \dim(e_2+e_3)) - \dim_k(e_2+e_3)} [e_2 + e_3]$$

$$X_3 = \langle [2e_2 + e_3] \rangle = v^{\frac{1}{2}(\dim(2e_2+e_3), \dim(2e_2+e_3)) - \dim_k(2e_2+e_3)} [2e_2 + e_3]$$

$$X_4 = \langle [e_1 + e_2 + e_3] \rangle = v^{\frac{1}{2}(\dim(e_1+e_2+e_3), \dim(e_1+e_2+e_3)) - \dim_k(e_1+e_2+e_3)} \cdot [e_1 + e_2 + e_3]$$

$$X_5 = \langle [e_1 + 2e_2 + e_3] \rangle = v^{\frac{1}{2}(\dim(e_1+2e_2+e_3), \dim(e_1+2e_2+e_3)) - \dim_k(e_1+2e_2+e_3)} \cdot [e_1 + 2e_2 + e_3]$$

$$X_6 = \langle [2e_1 + 2e_2 + e_3] \rangle = v^{\frac{1}{2}(\dim(2e_1+2e_2+e_3), \dim(2e_1+2e_2+e_3)) - \dim_k(2e_1+2e_2+e_3)} \cdot [2e_1 + 2e_2 + e_3]$$

$$X_7 = \langle [e_2] \rangle = v^{\frac{1}{2}(\dim e_2, \dim e_2) - \dim_k e_2} [e_2]$$

$$X_8 = \langle [e_1 + e_2] \rangle = v^{\frac{1}{2}(\dim(e_1+e_2), \dim(e_1+e_2)) - \dim_k(e_1+e_2)} [e_1 + e_2]$$

$$X_9 = \langle [e_1] \rangle = v^{\frac{1}{2}(\dim e_1, \dim e_1) - \dim_k e_1} [e_1]$$

因为e_1,e_2,和e_3分别是对应于点 1,2 和 3 的单模,所以

$$X_1 = [e_3], X_7 = [e_2], X_9 = [e_1],$$

令:

$$E_3 = \eta^{-1}(X_1) \quad E_{23} = \eta^{-1}(X_2) \quad E_{223} = \eta^{-1}(X_3)$$

$$E_{123} = \eta^{-1}(X_4) \quad E_1 = \eta^{-1}(X_9) \quad E_{1223} = \eta^{-1}(X_5)$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$E_{11223}=\eta^{-1}(X_6)$ $E_2=\eta^{-1}(X_7)$ $E_{12}=\eta^{-1}(X_8)$

和

$$X=\{E_1,E_2,E_3,E_{12},E_{11223},E_{123},E_{1223}E_{23},E_{223}\}$$

我们选取以下序:

$$E_3>E_{23}>E_{223}>E_2>E_{123}>E_{1223}>E_{11223}>E_{12}>E_1$$

那么这个序诱导出由这些元素生成的单项式集上的一个字典排序,而且对于此序,所有以下形式的单项式之集

$$B=\{E_3^{m_1}E_{23}^{m_2}E_{223}^{m_3}E_2^{m_4}E_{123}^{m_5}E_{1223}^{m_6}E_{11223}^{m_7}E_{12}^{m_8}E_1^{m_9}\mid m_i\in Z,m_i\leqslant 0,1\leqslant i\leqslant 9\}\ (*)$$

是量子包络代数 $U_q(C_3)$ 的一组(见[15]).

为了给出 C_3 型量子包络代数的 Gröbner-Shirshov 基,现在我们计算所有不可分解模的同构类之间的拟交换关系. 首先,我们通过计算两个不可分解模之间的 Hom 空间和 Ext 空间的维数,并且用[15]中的结果和 Auslander-Reiten 评议可以直接得到以下公式:

$E_{223}E_{123}=E_{123}E_{223}$(1),$E_{11223}E_2=E_2E_{11223}$(2),$E_3E_1=E_1E_3$(3),$E_{23}E_3=v^2E_3E_{23}$(4),$E_{1223}E_{223}=v^2E_{223}E_{1223}$(5),$E_{12}E_{11223}=v^2E_{11223}E_{12}$(6),$E_{223}E_{23}=v^2E_{23}E_{223}$(7),$E_{11223}E_{1223}=v^2E_{1223}E_{11223}$(8),$E_{123}E_3=v^2E_3E_{123}$(9),$E_2E_{223}=v^2E_{223}E_2$(10),$E_{11223}E_1=v^2E_{11223}E_1$(11),$E_{11223}E_{123}=v^2E_{123}E_{11223}$(12),$E_{123}E_{23}=vE_{23}E_{123}$(13),$E_2E_{1223}=vE_{1223}E_2$(14),$E_1E_{12}=vE_{12}E_1$(15),$E_{123}E_{1223}=vE_{1223}E_{123}$(16),$E_{12}E_2=vE_2E_{12}$(17),$E_1E_{123}=vE_{123}E_1$(18)

其次,我们通过计算两个不可分解模之间的 Hom 空间和 Ext 空间的维数,并且用[15]中的定理 3 和 Auslander-Reiten 评议可以直接得到以下公式:

$E_1E_{23}=v^{-1}E_{23}E_1+E_{123}$(19),$E_2E_{123}=v^{-1}E_{123}E_2+E_{1223}$(20),$E_1E_2=v^{-1}E_2E_1+E_{12}$(21),$E_2E_3=v^{-2}E_3E_2+E_{23}$(22),$E_1E_{223}=v^{-2}E_{223}E_1+E_{1223}$(23),$E_{12}E_3=v^{-2}E_3E_{12}+E_{123}$(24),$E_2E_{23}=E_{23}E_2+(v+v^{-1})E_{223}$(25),$E_1E_{1223}=E_{1223}E_1+(v+v^{-1})E_{11223}$(26),$E_{12}E_{123}=E_{123}E_{12}+(v+v^{-1})E_{11223}$(27)

最后,用上面这些关系用"归纳"法来得到剩下的拟交换关系:

$$E_{223}E_3=E_3E_{223}+\frac{v^2-1}{v+v^{-1}}E_{23}^2\ (28),$$

$$E_{11223}E_{23}=E_{23}E_{11223}+\frac{v^2-1}{v+v^{-1}}E_{1223}^2\ (29),$$

$$E_{1223}E_3=E_3E_{1223}+(v^2-1)E_{23}E_{123}\ (30),$$

$$E_{12}E_{23}=E_{223}E_{12}+(v^2-1)E_{1223}E_2\ (31),$$

$$E_{1223}E_{23}=vE_{23}E_{1223}+(v^2-v^{-2})E_{223}E_{123}\ (32),$$

$$E_{12}E_{1223}=vE_{1223}E_{12}+(v^2-v^{-2})E_{11223}E_2\ (33),$$

$$E_{12}E_{23}=v^{-1}E_{23}E_{12}+(v^2+v^{-1})E_{1223}\ (34),$$

$$E_{11223}E_{23}=E_{23}E_{11223}+(v^2-1)E_{123}E_{1223}\ (35),$$

$$E_{11223}E_3=E_3E_{11223}+\frac{v^2-1}{v+v^{-1}}E_{123}^2\ (36)$$

下面我们以公式(32)的推导过程为例,详细说明上面所说的"归纳"法.

首先,我们把 E_{23} 乘关系式(20)的两边得到:

$$E_2E_{123}E_{23}=v^{-1}E_{123}E_2E_{23}+E_{1223}E_{23}$$

对上式我们用公式(13),(25)得到:

$$E_2(vE_{23}E_{123})=v^{-1}E_{123}[E_{23}E_2+(v+v^{-1})E_{223}]+E_{1223}E_{23}$$

$$vE_2E_{23}E_{123}=v^{-1}E_{123}E_{23}E_2+(1+v^{-2})E_{123}E_{223}+E_{1223}E_{23}$$

再分别用公式(25),(13),(1)得到:

$$v[E_{23}E_2+(v+v^{-1})E_{223}]E_{123}=v^{-1}(vE_{23}E_{123}E_2+(1+v^{-2})E_{223}E_{123}+E_{1223}E_{23}\ vE_{23}E_2E_{123}+(1+v^2)E_{223}E_{123}=E_{23}E_{123}E_2+(1+v^{-2})E_{223}E_{123}+E_{1223}E_{23}$$

用公式(20)得到:

$$vE_{23}[v^{-1}E_{123}E_2+E_{1223}]+(1+v^2)E_{223}E_{123}=E_{23}E_{123}E_2+(1+v^{-2})E_{223}E_{123}+E_{1223}E_{23}\ E_{23}E_{123}E_2+vE_{23}E_{1223}+(1+v^2)E_{223}E_{123}=E_{23}E_{123}E_2+(1+v^{-2})E_{223}E_{123}+E_{1223}E_{23}$$

最后等式两边整理得到:

$$E_{1223}E_{23}=vE_{23}E_{1223}+(v^2-v^{-2})E_{223}E_{123}\ (32)$$

为了书写方便,我们用 R(1)来表示以上关系的集合. 易见,集合 R(1)包含定义关系 S^+. 所以量子包络代数 $U_q(C_3)$ 可以被认为是商代数 $Q(v)\langle X\rangle/I$,其中 I 是由 R(1)生成的理想.

我们用 $p_i(1\leqslant i\leqslant 36)$ 来表示 R(1)中的公式的左边减右边而得到的多项式,令

$$S^+=\{p_i\mid 1\leqslant i\leqslant 36\}$$

那么就有 $S^+\in S^{+c}$显然,对于序 $<$ 和集合 S^{+c} 形式为(*)的单项式都是不可约;反之,对于序 $<$ 和集合 S^{+c} 不可约的任意单项式必须为(*)中的形式. 又因为(*)是一组线性基,因此根据[3]中的钻石引理,我们得到以下结果

定理:集合 S^{+c} 是量子包络代数 $U_q(c_3)^+$ 的极小 Gröbner-Shirshov 基.

从[13]可知 X 中的每一个元素是 E_1,E_2,E_3 的多项式. 如果我们对这些多项式作用对合同构 ω

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(见[6])，而且我们令

$F_1 = \omega(E_1), F_2 = \omega(E_2), F_3 = \omega(E_3), F_{12} = \omega(E_{12}), F_{123} = \omega(E_{123}), F_{1223} = \omega(E_{1223}), F_{11223} = \omega(E_{11223}), F_{23} = \omega(E_{23}), F_{223} = \omega(E_{223})$,

那么我们就得到关于子代数 $U_q(c_3)^-$ 的生成元

$Y = \{F_1, F_2, F_3, F_{12}, F_{11223}, F_{123}, F_{1223}, F_{223}, F_{23}\}$

的类似于 R(1) 的关系集 R′(1)，易知 R′(1) 包含定义关系集. 因此如果 J 是由 R′(1) 生成的理想，那么 $U_q(c_3)^-$ 可以被认为是上商代数 $Q(v)\langle Y\rangle/J$ 我们选取序

$F_3 > F_{23} > F_{223} > F_2 > F_{123} > F_{1223} > F_{12} > F_{11223} > F_1$

那么这个序诱导出由这些元素生成的单项式集上的一个字典排序. 类似于上面的讨论，我们用 $S^{-c}(1 < i < 36)$ 来表示 R′(1) 中的公式的左边减右边而得到的多项式，而且令

$$S^{-c} = \{p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 36\}$$

那么就有 $S^- \subset S^{-c}$ 同样，我们有以下定

定理 集合 S^{-c} 是量子包络代数 $U_q(c_3)^-$ 的极小 Gröbner-Shirshov 基.

如果我们选取序

$E_3 > E_{23} > E_{223} > E_2 > E_{123} > E_{1223} > E_{11223} > E_{12} > E_1 > K_1 > K_2 > K_3 > K_1^{-1} > K_2^{-1} > K_3^{-1} > F_3 > F_{23} > F_{223} > F_2 > F_{123} > F_{1223} > F_{12} > F_{11223} > F_1$

那么这个序诱导出由这些元素生成的单项式集上的一个字典排序. 这时我们由 [4] 中的定理 2.7 得到本文的主要定理：

定理：集合 $S^{-c} \cup K \cup T \cup S^{+c}$ 是量子包络代数 $U_q(c_3)$ 的极小 Gröbner-Shirshov 基.

参 考 文 献

[1] B. Buchberger, An algorithm for finding a basis for the residue class ring of a zero-dimensional ideal, Ph. D. Thesis, University of Innsbruck, 1965.

[2] G. M. Bergman, The diamond lemma for ring theory, Adv. Math. 29 (1978), 178 – 218.

[3] A. I. Shirshov, Some algorithmic problems for Lie algebras, Siberian Math. J. 3 (1962), 292 – 296.

[4] L. A. Bokut, P. Malcolmson, Gröbner-Shirshov basis for quantum enveloping algebras, Israel J. Math. 96 (1996), 97 – 113.

[5] A. Obul, G. Yunus, Gröbner-Shirshov basis of quantum group of type E_6, J. Algebra, 346(2011), 248 – 265.

[6] C. X. Qiang and A. Obul, Gröbner-Shirshov basis of quantum group of type F_4, Frontiers of Mathematics in China, 2014, 9(1):135 – 150.

[7] Y. H. Ren and A. Obul, Gröbner-Shirshov basis of quantum group of type G_2, Comm. Algebra, 2011, 39(5):1510 – 1518.

[8] B. M. Deng, J. Du, B. Parshal, J. P. Wang, Finite Dimensional Algebra and Quantum Groups, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 150, Amer. Math. Soc. Providence, 2008.

[9] V. G. Drinfel′d, Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, Doklady Akademii Nauk SSSR, 1985, 283(5): 1060 – 1064.

[10] M. Jimbo, A q-difference analogue of U(G) and the Yang-Baxter equation, Letters in Mathematical Physics, 1985, 10(1):63 – 69.

[11] V. Dlab, C. M. Ringel, Indecomposable Representations of Graphs and Algebras, Memoirs Amer. Math. Soc., no. 173, Amer. Math. Soc., Providence, 1976.

[12] M. Rosso, Finite dinensional representations of the quantm analogue of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra, Comm. Math. phys, 1988, 117:581 – 593.

[13] C. M. Ringel, Hall polynomials for Representation-Finite Hereditary Algebras, Adv. Math, 1990, 84:137 – 178.

[14] C. M. Ringel, Hall algebras and quantum groups, Invent. math, 1990, 101:583 – 592.

[15] C. M. Ringel, PBW-bases of quantum groups, reine angew. Math, 1996, 470:51 – 88.

[16] J. C. Jantzen, Lectures on Quantum groups, Graduate Studies in Mathematics, Volume 6, Amer. Math. Soc., Providence, 1996.

(下转第 10 页)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

71.
[6] 张世武,张之正. 广义 Fibonacci 序列与 Aitken 变换的一点注记[J]. 上海大学学报(自然科学版),1999,vol. 5(5):385 - 387.
[7] W. Gander. On Halley. s iteration method [J]. The American Mathematical Monthly,1985, 92: 131 - 134.

Contacts on Generalized Fibonacci Sequence and Some Transformations

Zhang Fuling

(College of Mathematics and Information,Weinan Teacher's College, Weinan Shaanxi 714000)

Abstract

The purpose of this paper is to establish some relations between the generalized Fibonacci and the Secant, Newton-Raphson and Halley transformations. This consequence popularize some previous results.

Key words: generalized fibonacci sequence, ratio, transformation.

(上接第 5 页)

Gröbner-Shirshov Basis of Quantum Group of Type C_3

Sanar. Humax Abdukadir. Obul

(Xinjiang university, Xinjiang Urumqi 830046)

Abstract

In this paper we prove, by using the Auslander-Reiten theory in representation theory of finite dimensional algebra and the Ringel-Hall algebra approach, that the set of all skew-commutator relations between the root vectors of quantized enveloping algebra of type C_3 is a minimal Gröbner-Shirshov basis.

Key words: Ringel-Hall algebra, indecomposable module, skew-commutator relation, Gröbner-Shirshov basis.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net