DOI:10.19789/j.1004-9398.2018.01.003

广义 Gauss-Seidel 迭代法的预测 - 校正方法*

伊马木·麦麦提 阿布都热西提·阿布都外力** 娜扎开提·阿迪力
(新疆大学数学与系统科学学院,新疆 乌鲁木齐 830046)

摘 要

本文推出广义 Gauss-Seidel 迭代法与它的预测 - 校正法,并讨论了该方法的收敛性条件和收敛速度. 给出数值例子验证了新迭代法的有效性.

关键词: 迭代法,预测 - 校正法,谱半径,M - 矩阵.
中图分类号: O241.6

1 引 言

考虑线性方程组

$$Ax = b, \tag{1.1}$$

其中 A 是 $n \times n$ 的非奇异矩阵,b 是 n 维向量.

将系数矩阵 A 进行分裂为 $A = D - L - U$,其中 D 是对角矩阵,L 是下三角矩阵,U 是上三角矩阵. 则经典的 Gauss-Seidel 迭代法为

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b, \quad k = 1,2,3,\cdots, \tag{1.2}$$

其中 $(D - L)^{-1}U$ 是迭代矩阵,$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 是一个初始向量.

对部分线性方程组而言,用经典 Gauss-Seidel 迭代求解,敛速度不理想,为了解决该问题,本文推出了广义 Gauss-Seidel(简称为广义 G-S)迭代法和它的预测 - 校正方法.

2 广义 G-S 迭代法

将系数矩阵 A 进行分裂为 $A = D_m - L_m - U_m$,其中 D_m 是带状对角矩阵,带宽为 $2m + 1$,D_m 的各元素是

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & |i - j| \leqslant m, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $m = 0,1,2,\cdots,(n-1)/2$,L_m 与 U_m 是矩阵 A - D_m 的严格上下部分,D_m, L_m, U_m 分别为

$$D_m = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m+1} & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ a_{m+1,1} & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & a_{n-m,n} & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_{n,n-m} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

$$L_m = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ -a_{m+2,1} & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-m-1} & & \end{bmatrix},$$

$$U_m = \begin{bmatrix} & -a_{1,m+2} & \cdots & -a_{1,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & -a_{n-m-1,n} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}.$$

如果取矩阵 $D_m - L_m$ 作为迭代矩阵 $(D_m - L_m)^{-1}U_m$,则得到文献[1]中的广义 G-S 迭代方法. 迭代公式是

$$x^{(k+1)} = (D_m - L_m)^{-1}U_m x^{(k)} + (D_m - L_m)^{-1}b,$$

收稿日期: 2017-03-01
* 国家自然科学基金(10971024)
**通讯作者.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$k = 0,1,2,\cdots. \quad (2.2)$$

若分裂矩阵中取矩阵 $D_m - U_m$ 作为迭代矩阵 $(D_m - U_m)^{-1}L_m$, 则推出的迭代方法是

$$x^{(k+1)} = (D_m - U_m)^{-1}L_m x^{(k)} + (D_m - U_m)^{-1}b,$$
$$k = 0,1,2,\cdots. \quad (2.3)$$

这种迭代方法在计算过程中每一步迭代逆向计算,即 $x_n^{(k+1)} \to x_{n-1}^{(k+1)} \to \cdots \to x_1^{(k+1)}$, 其计算顺序恰好与式(2.2)的迭代方法与经典高斯-赛德尔迭代法[2]相反.

当 $m=0$ 时式(2.2)与(2.3)表示的是正,反方向的经典 G-S 迭代法,计算公式分别为

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = \left(b_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)}\right)/a_{ii}, \\ i = 1,2\cdots,n; \quad k = 0,1,2,\cdots. \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = \left(b_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)}\right)/a_{ii}, \\ i = n,n-1,\cdots,1; \quad k = 0,1,2,\cdots. \end{cases} \quad (2.5)$$

3 广义 Gauss-Seidel 迭代法的预测-校正方法

为了改进广义 G-S 迭代法的收敛速度,将两种广义 G-S 迭代方法相匹配,生成广义 G-S 迭代法的预测-校正方法:

$$\begin{cases} (D_m - L_m)y^{(k+1)} = U_m x^{(k)} + b, \\ (D_m - U_m)x^{(k+1)} = L_m y^{(k+1)} + b. \end{cases} \quad (3.1)$$

本方法先用(2.2)的广义 G-S 迭代法预测 $y^{(k+1)}$ 的值, 然后用(2.3)的广义 G-S 迭代法校正 $x^{(k+1)}$. 当 $m=0$ 时,预测公式和校正公式的分量形式分别为

$$\begin{cases} y_i^{(k+1)} = \left(b_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}y_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)/a_{ii}, \\ \qquad i = 1,2,\cdots,n, \\ x_i^{(k+1)} = \left(b_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}y_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)}\right)/a_{ii}, \\ \qquad i = n,n-1,\cdots,1. \end{cases} \quad (3.2)$$

4 收敛性分析

迭代法的收敛性依赖于迭代矩阵,设迭代矩阵为 G,则迭代法收敛的充分必要条件是 $\rho(G) < 1$(其中 ρ 是迭代矩阵的谱半径),充分条件是 $\|G\| < 1$(其中 $\|\ \|$ 表示为任意范数). 下面给出了一些比较容易验证的充分条件.

引理 1[3] 若 $M = (M_{ij})$ 和 $N = (N_{ij})$ 都是 $n \times n$ 的矩阵,并且 M 是严格对角占优矩阵,则矩阵 $M^{-1}N$ 的特征值满足

$$\min_i\left(\sum_{j=1}^{n} |N_{ij}|/\left(|M_{ii}| - \sum_{j=1,i\neq j}^{n} |M_{ij}|\right)\right) \leqslant \rho(M^{-1}N) \leqslant \max_i\left(\sum_{j=1}^{n} |N_{ij}|/\left(|M_{ii}| - \sum_{j=1,i\neq j}^{n} |M_{ij}|\right)\right). \quad (4.1)$$

定理 1 如果 A 为严格对角占优矩阵,则新广 G-S 迭代法是收敛.

证明 将严格对角矩阵 A 分裂为 $A = M + N$,其中 $M = D_m + U_m$, $N = L_m$ 并且 M 是严格对角占优矩阵. 从上述的引理可得

$$\rho(M^{-1}N) \leqslant \rho = \max_i \rho_i, \text{其中}$$
$$\rho_i = \sum_{j=1}^{n} |N_{ij}|\Big/\left(|M_{ii}| - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |M_{ii}|\right). \quad (4.2)$$

我们先证: $\rho = \max\rho_i < 1$, 因为 A 是严格对角占优矩阵,所以满足

$$|M_{ii}| > \sum_{j=1,i\neq j}^{n} |M_{ij}| + \sum_{j=1}^{n} |N_{ij}|. \quad (4.3)$$

由式(4.3)可以推到

$$\sum_{j=1}^{n} |N_{ij}|\Big/\left(|M_{ii}| - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |M_{ii}|\right) < 1. \quad (4.4)$$

由不等式(4.4)可得 $\rho(M^{-1}N) < \rho < 1$. 据代法收敛的充分必要条件,新广义 G-S 迭代法是收敛.

定理 2[2] 如果 A 为不可约弱对角占优矩阵,则新的广义 G-S 迭代法是收敛.

定义 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 是 $n \times n$ 的矩阵,如果 a_{ij} 与 b_{ij} 满足 $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ $(a_{ij} \leqslant b_{ij})$,则矩阵 A 与 B 的关系表示为 $A \leqslant B$ $(A < B)$.

定理 3[4] 设矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 若 $A \leqslant B, b_{ij} \leqslant 0$, 且 A 是 M-矩阵,则 B 也是 M-矩阵.

定理 4[4,5] 若 $A \in Z^{n\times n}$, 则以下命题相互等价(其中 0 是零矩阵):

(1) A 为非奇异 M-矩阵;

(2) A 是非奇异,且 $A^{-1} \geqslant 0$;

(3) 存在 A 的一种分裂 $A = P - Q$(正则分裂),使得 $P^{-1} \geqslant 0, Q \geqslant 0$,且 $\rho(P^{-1}Q) < 1$;

定理 5 如果 A 是 M-矩阵,则新广义 G-S 迭代法是收敛.

证明 设矩阵 A 分裂为 $A = P - Q$,其中 $P = D_m - U_m, Q = L_m$.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

因为 A 是 M 矩阵,显然, $P \geqslant A, Q > 0$,由定理 3 可知分裂矩阵 P 也是 M – 矩阵.

又因为 P 是 M – 矩阵,根据定理 4 的命题(2),(3)可知 P 是非奇异,$P^{-1} \geqslant 0$,且 $\rho(P^{-1}Q) < 1$,所以迭代矩阵的谱半径满足条件: $\rho(P^{-1}Q) < 1$,若系数矩阵 A 为 M – 矩阵,则新广义 G-S 迭代法是收敛.

定理 6　广义 G-S 预测 – 校正法收敛的充要条件是 $\rho(G_{正} \cdot G_{反}) < 1$,收敛的充分条件是 $\| G_{正} \cdot G_{反} \| < 1$.

证明　用预测 – 校正公式(3.1)很容易推到:

$$x^{(k+1)} = (D_m - U_m)^{-1} L_m (D_m - L_m)^{-1} U_m x^{(k)} + (D_m - U_m)^{-1} L_m (D_m - L_m)^{-1} b + (D_m - L_m)^{-1} b. \quad (4.5)$$

由迭代式(4.5)可知预测 – 校正方法的迭代矩阵为 $G = (D_m - U_m)^{-1} L_m (D_m - L_m)^{-1} U_m$,

根据矩阵的运算性质,可得迭代矩阵 G 刚好为两种迭代矩阵的乘积,即 $G = G_{正} \cdot G_{反}$,因此预测 – 校正方法收敛的充要条件是: $\rho(G_{正} \cdot G_{反}) < 1$,收敛的充分条件是: $\| G_{正} \cdot G_{反} \| < 1$.

由上面所述的一些定理可知,如果系数矩阵是对角占优矩阵,不可约弱对角占优矩阵,M – 矩阵等情况下解线性方程程组的广义 G-S 预测 – 校正法是收敛的.

5　数值实验

为了比较迭代法的收敛速度,下面给了数值例子,根据其结果,说明这些方法的优缺点.

例 1[5]　设线性方程组(1.1)中 A, b 值分别为

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1.5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 1 & 1.5 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 6 & 1 & 1.5 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & -2 & 6 & 1 & 1.5 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -2 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 7.5 \\ 6.5 \\ \vdots \\ 6.5 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

此线性方程组的精确解是 $x^* = (1,1,\cdots,1)^T$,迭代初始向量是 $x^{(0)} = (0,0,\cdots,0)^T$.

表 1　当 $m = 0$ 时各种迭代法的迭代次数(经典 G-S 法)

矩阵 \ 迭代法	广义 G-S(正)	广义 G-S(反)	预测 – 校正法
$n = 10$	23	15	9
$n = 20$	30	16	10
$n = 50$	32	16	10
$n = 100$	32	16	10

表 2　当 $m = 1$ 时各种迭代法的迭代次数

矩阵 \ 迭代法	广义 G-S(正)	广义 G-S(反)	预测 – 校正法
$n = 10$	13	11	9
$n = 20$	14	11	9
$n = 50$	14	11	9
$n = 100$	14	11	9

由表(1),(2)可知,广义 G-S 迭代法及预测 – 校正方法解线性方程组(1.1)均收敛,而反方法的收敛速度比正方法较快,预测 – 校正算法的收敛速度比两个方法都快(即取 n 相同值时,达到同样精度所需迭代次数较少). 当参数 m 取不同值时,三种迭代方法的迭代效果也不相同,m 的值越大三种迭代格式的收敛速度越快,迭代次数越少.

6　结　语

以上介绍了基于 Gauss-Seidel 迭代法的三种广义迭代方法. 并在理论和数值计算方面证明了本文中的迭代法是有效的. 若三种迭代法均收敛,则正反广义 Gauss-Seidel 迭代的收敛速度基本相同,预测 – 校正方法的收敛速度要比这两种广义迭代法更快一些. 本文中迭代法的收敛速度依赖于带宽因子 m,因此 m 取的值越大收敛速度也是越快.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参 考 文 献

[1] Salkuyeh D K. Generalized Jacobi and Gauss-Seidel methods for solving linear system of equations [J]. Numer Math J Chinese Univ (English Ser),2007, 16(2):164 - 170.

[2] 李庆扬,关治,白峰. 数值计算原理[M]. 北京:清华大学出版社,2000:191 - 201.

[3] Jin X Q, Wei Y M, Tam H S. Preconditioning technique for symmetric M-matrices [J]. Calcolo, 2005, 42(2):105 - 113.

[4] 张凯院,徐仲. 矩阵论[M]. 北京:科学出版社,2013:272 - 281.

[5] Lu X J, Lei L I. Geometric interpretation of several classical iterative methods for linear system of equations and diverse relaxation parameter of the SOR method [J]. Applied Mathematics, 2013, 3(3):269 - 278.

Generalized Gauss-Seidel Iterative Methods and Prediction-Correction Methods

Imam Mamat Abdirixit Abduwali Nazakat Adil

(College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046)

Abstract

In this paper, a generalization Gauss-Seidel iterative methods and it's prediction-correction methods were proposed and their convergence conditions and convergence rate were studied. Numerical experiments is given to show the efficiency of the new methods.

Key words: iterative method, prediction-correction method, spectral radius, M-matrix.

通讯作者 阿布都热西提·阿布都外力(1963 -),男,维吾尔族,新疆乌鲁木齐人,博士,教授,计算数学,E-mail: rashit@xju.edu.cn.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net