DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.04.009

质心参考系下弹性碰撞规律的形式与方法*

张婷玉[1] 胡扬洋[2]

(1. 北京市陈经纶中学 本部初中,北京 100020; 2. 首都师范大学 教育学院,北京 100048)

摘 要

研究了质心参考系下弹性碰撞过程,得出质心参考系下的碰撞公式. 对"牛顿碰撞定律"及"状态方程"的初状态的解进行新的理解. 最后对教法与学法归结了启示.

关键词: 质心参考系,弹性碰撞,牛顿碰撞定律.

中图分类号: G640

"碰撞"是中学物理的一个传统的复杂专题,近年来则依然是高考、自主招生考试的热点,并且不断以新的知识背景和形式出现. 然而,碰撞问题中还存在一些遗留下来的疑惑与争议,相当一部分学生对碰撞的实质还比较模糊. 而中学物理教师对碰撞公式的总结则多体现繁琐特征. 对此,我们试图基于近年来自主招生等考试的高要求,在质心参考系下进行深入研究碰撞规律的形式并总结科学方法,以期对教学有所裨益.

1 传统碰撞公式的形式繁琐与意义干瘪

本节教学的主要内容是对以下模型总结"碰撞公式".

将发生对心碰撞的 A、B 两小球质量分别为 m_1、m_2,碰撞前的速度为 v_{10} 和 v_{20} 且 $v_{10} > v_{20}$,求两球碰撞后的速度 v_1 和 v_2.

传统解法惯于在实验室参考系下求解. 如图1所示,在实验室参考系下建立坐标系,令 x 轴与各速度矢量平行,初速度方向为正方向. 列出碰撞过程中机械能守恒、动量守恒方程,最终求解得碰后速度的多项式形式的表达式:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{10} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{20},$$

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{20} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{10};$$

或分式形式:

$$v_1 = \frac{m_1v_{10} - m_2v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2},$$

$$v_2 = \frac{m_2v_{20} - m_1v_{20} + 2m_1v_{10}}{m_1 + m_2}.$$

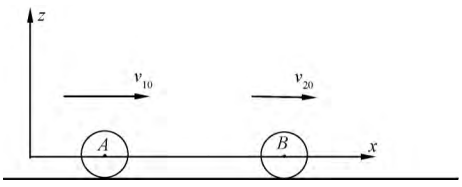


图1 实验室参考系下的碰撞

教师提倡学生熟记上述公式,强调遇到同类问题时直接套用. 此种做法虽可以提高解题速度和减轻思维负荷,然而一方面,上述公式每一项都没有相关的物理意义做支撑,公式复杂苍白缺乏厚重感,学生只能凭借机械式记忆,解题过程中公式用错不在少数. 另一方面,"碰撞"全方位考察学生对物理过程、状态变化及能量关系理解能力,在实验室参考系下进行小球速度的求解,致使相当一部分学生对碰撞的实质比较模糊,解题时思维受限于某些特殊模型,遇到稍微复杂问题时便会束手无措. 培养学生思维,提高学生能力更是无从谈起. 对此我们认为,"碰撞"问题的教学已渐入瓶颈,必须加以解决,方可保证教学科学有效地进行.

收稿日期: 2015-06-05

* 本文系人民教育出版社课程教材研究所"十二五"课题"高中物理必修教科书中科学方法的呈现研究"(KC2014-049)阶段性成果之一

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2 质心参考系下对碰撞的过程分析与公式推导

我们倡导回归物理学本身,理论推导碰撞问题的物理概念、规律,在质心参考系下求解碰撞问题. "参照框架(reference frame)"一直以来与"坐标系(coordinates)"相混淆,二者的主要区别在于,参照框架具有物理意义,而坐标系则仅是一种数学的处理. "依赖性的函数如速度是相对于物理的参照框架被度量的,但方程如何写所依赖的数学坐标系却是可以任意选择的. 一个 reference frame 并不一定要提供坐标系"[1].

首先,向学生引入质点系概念,通常我们将包含两个或两个以上相互有联系的质点组成的力学系统称为质点系. 如图 2-a 所示,将 A、B 两小球视作质点系,并选择系统质心 c 为参照框架. (由于系统在水平方向不受外力作用,因此质心系为惯性系.) 在质心参考系下,A、B 就分别以 u_{10} 和 u_{20} 的速度相向运动,为质心参考系下对心碰撞模型.

2.1 碰撞前后质心运动的描述

易得出质心 c 点的位置,即是 A、B 连心线上的 C 点——把线段按 A、B 质量反比例分配: $\frac{AC}{BC}=\frac{m_2}{m_1}$.

进一步,根据几何关系及叠加原理导出质心在实验室参考系下的速度: $v_c=\frac{BC}{AB}(v_{10}-v_{20})+v_{20}$,即 $v_c=\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})+v_{20}$. 最终得出: $v_c=\frac{m_1v_{10}+m_2v_{20}}{m_1+m_2}=\frac{\sum p}{\sum m}$. 该公式也可直接由动量守恒得出,并得出碰撞前后质心的速度 v_c 保持不变.

2.2 质心参考系下碰前速度的描述

在质心参考系下,如图 2 所示: 取 v_c 方向为 x′轴正方向,取投影后的各矢量: A、B 碰撞前的速度分别为 u_{10} 和 u_{20}. 由几何关系或速度叠加原理可得:

$$u_{10}=v_{10}-v_c=\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})=\frac{AC}{AB}(v_{10}-v_{20}),$$

$$u_{20}=v_{20}-v_c=-\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})=-\frac{BC}{AB}(v_{10}-v_{20})$$

显然, u_{10} 和 u_{20} 同样是按质量的比例分配相对速度的结果,同图中的几何关系保持一致.

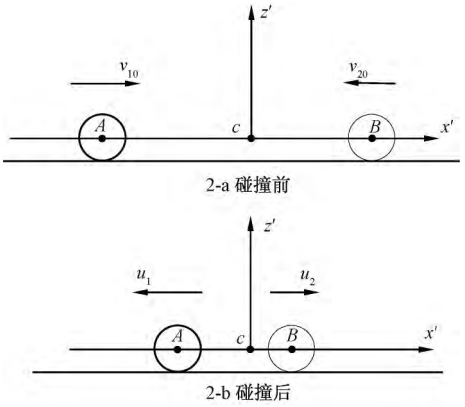


图 2 质心参考系下的碰撞

2.3 质心参考系下碰撞过程的分析

质心参考系下, A、B 相向运动,最终在质心处发生碰撞,碰撞后的速度分别为 u_1 和 u_2. 然而,这一判断学生不易理解,原因在于尚不熟悉用变换参考系方法解决力学问题,其心理发展根源则是学生"自我中心化"的认知定势尚未转化. 因此,教师应用生动的解释引导学生理解变换质心参考系的意义,即"你"站在质心上观察两球的运动. 这种说明方式与学生的心理发展水平也是一致的.

在质心参考系下,两球碰后速度如何表达? 此时,教师可引导学生思考: (质心系下) 碰撞后小球是否原速返回? 在学生犹疑之时,教师可进一步引导学生思考: 如果是原速返回,是否满足动量与能量守恒? 显然,由于"原速返回"结论满足能量与动量守恒,因此是正确结论. (如图 2-b 所示) 由此易得碰后在实验室参考系下 A、B 的速度: $u_1=-u_{10}=-\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})$, $u_2=-u_{20}=\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})$.

由叠加原理得出实验室参考系下两球的碰后速度: $v_1=v_c+u_1$, $v_2=v_c+u_2$, 即: $v_1=\frac{m_1v_{10}+m_2v_{20}}{m_1+m_2}-\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})$, $v_2=\frac{m_1v_{10}+m_2v_{20}}{m_1+m_2}+\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})$. 至此,我们得到了"碰撞公式"的新形式,表达式中前项通为质心速度,后项物理意义为"按质量反比例分配相对速度",而其符号则可结合上述物理过程或图像方便地判断. 这使得这种碰撞公式的形式更便于理解和记忆,并对碰撞过程的理解更加深入,其中运用的变换参考系、相对运动

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

分析则有着物理方法的价值.

3　对方程组的数学结构分析与物理意义理解

对上述过程的反思可以获得更多的知识. 事实上,上述推导过程中还有一些重要问题未被发觉,我们需要回归碰撞过程的基本规律,从方程组的数学结构中给以透视. 事实上,能量守恒、动量守恒方程组足以解决公式推导问题,也是对碰撞问题进行分析的根本出发点. 以上任何分析都是对两方程数学变换的中间结论,并且尚有一些结论未被探知.

3.1　牛顿碰撞定律

对能量守恒方程: $\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$,移项整理可得: $m_1(v_{10}+v_1)(v_{10}-v_1)=m_2(v_2+v_{20})(v_2-v_{20})$; 又由动量守恒方程 $m_1v_{10}+m_2v_{20}=m_1v_1+m_2v_2$ 得 $m_1(v_{10}-v_1)=m_2(v_2-v_{20})$, 代入前式并约分得:

$v_{10}-v_{20}=-(v_1-v_2)$, 即"牛顿碰撞定律",物理意义为: 碰撞前后相对速度大小不变,方向相反.

3.2　状态方程的初状态解

牛顿碰撞定律方程与动量守恒方程同样为一次方程,如果联立二者求解,则可以避免解原二次方程组的麻烦. 这一策略貌似便捷,但并不明智. 原始方程组是二次方程,原本应有两组解,而上述策略只能得到一组. 如果将反思继续扩展,可以发现以上在质心系下对碰撞公式的推导也只得出了一组解. 另一组解的丢失都意味着分析过程可能存在的漏洞,因此必须进行更严密的反思.

仔细检查不难发现,在牛顿碰撞定律的推导过程中,对"$m_1(v_{10}-v_1)=m_2(v_2-v_{20})$"不加讨论地约分正是丢失解的原因. 而由此也易得方程组的另一组解: $v_1=v_{10}$, $v_2=v_{20}$.

需指出,这组解并非没有意义,这是对碰撞过程初状态的表示. 事实上,原始方程组就是一组状态方程,以上分析则印证了另一条定律: 状态方程必定有一组初状态解. 回顾质心系下碰后速度的得出过程不难发现,"原速返回"其实是我们"猜"出的结论,是通过代入原始方程组的验证并确认下来.

3.3　"越过": 方程状态解的一种物理意义

一段时期以来,我们都将"$v_1=v_{10}$, $v_2=v_{20}$"理解为"并不存在、可以舍弃"的初状态解,然而近来有教师找到了实际存在的例子[2]. 如图 3 所示,光滑水平面上的小球与自由滑动的斜面发生"另类"碰撞,碰后小球越过斜面到另一侧,其"碰后速度"正是上述的"初状态解". 可见,"初状态解"也是碰撞"超越"状态下的解. 即碰撞后,碰撞物超过了被碰撞物.

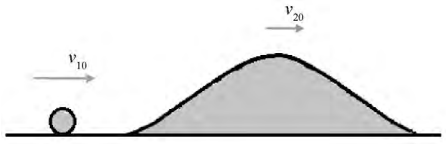


图 3　"超越"情况的碰撞

4　碰撞公式的应用与方法迁移

以上研究不仅在于碰撞公式新的形势本身,其过程中使用的变换参考系、相对运动等科学方法对解决问题都有更高的价值. 以下一例说明.

如图 4-a 所示的小装置为弹簧连接的质量为 m_1、m_2 的两个小球,用细绳将弹簧压缩,压缩能量为 E_0. 如图 4-b,将两球组成的系统从高度为 h 处自由下落,与地面发生弹性碰撞后反弹至高度 $\frac{h}{4}$ 处绳忽然断开,求绳断裂时刻两小球的速度 v_1、v_2.

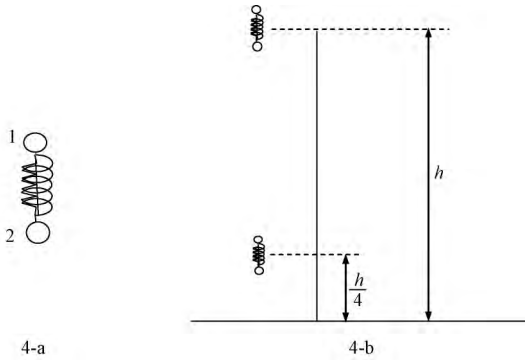


图 4

对该题,绳子断裂后亦可视为一种碰撞. 若选用实验室参考系,利用"机械能守恒"、"动量守恒"等规律列方程组求解会非常复杂. 此时,若变换参考系进行分析,可得绳子断裂时刻小球的速度为质心速度及小球相对质心速度的叠加. 选择竖直向下为正方向,碰撞前后质心的速度保持 v_c 不变. 即质心参考系下,系统的总动量为零,也即 $-p_{1c}=p_{2c}$. 则释放后两小球能量分别为 $E_1=\frac{p_1^2}{2m_1}$, $E_2=\frac{p_2^2}{2m_2}$, 即 $E_1:E_2=m_2:m_1$. 意即释放后弹簧储存能量按照质量反比例分配. 这一结论也可由几何关系以及等效伸长量、

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

等效劲度系数换算求得.

由以上分析可得: 对球 1 有 $\frac{E_0 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$, 即 $u_1 = -\sqrt{\frac{2E_0 m_2}{m_1(m_1 + m_2)}}$; 2 球: $\frac{E_0 m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} m_2 u_2^2$, 即 $u_2 = \sqrt{\frac{2E_0 m_1}{m_2(m_1 + m_2)}}$.

在 $\frac{h}{4}$ 高度处, 由系统机械能守恒: $\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_c^2 = \frac{1}{4}(m_1 + m_2) gh$, 得 $v_c = -\sqrt{\frac{gh}{2}}$.

则碰撞后两小球的速度分别为:

$v_1 = v_c + u_1$ 即 $v_1 = -\sqrt{\frac{gh}{2}} - \sqrt{\frac{2E_0 m_2}{m_1(m_1 + m_2)}}$;

$v_2 = v_c + u_2$ 即 $v_2 = -\sqrt{\frac{gh}{2}} + \sqrt{\frac{2E_0 m_1}{m_2(m_1 + m_2)}}$.

以上过程避免了大量方程的推演, 且物理过程更加明晰、深刻. 其使用的变换(质心)参考系等方法显出了极大的效力, 使解决过程舍去了繁琐的思维过程, 将碰撞问题简化, 求解方式大大提高了学生的解题速度, 值得作广泛的迁移.

5 小结与反思

鉴于此类专题教学的典型性以及对高水平学生培训的示范价值, 我们进一步对教法与学法归结了启示.

5.1 学法启示

在碰撞课题之前, 学生在学习过动量、能量知识之后已独立处理了一些综合问题, 有了一些初步的体验, 同时也生成了或隐或显的疑点. 而对综合问题还缺乏宏观、系统的思路和方法. 在这个意义上, 以上工作为高中物理的学习方法和学习深度提供了一种示范, 同时也是对高中阶段所要求的素质、习惯等进行一次集中的检验和矫正. 这就需要教师要恰当提问、精当示范, 不仅对该课题划上句号, 而且为学生今后的学习提供引导. 学习时则应在课前总结近期的习题, 课后则应进行充分消化和练习, 并有意识地提炼科学方法.

5.2 教法启示

对于高水平的学生, 可以引入质心参考系, 并讨论其物理意义; 一般水平的学生, 则采用实验室参考系, 让其明白推导过程及公式的物理意义, 同样可以得出牛顿碰撞定律. 所以, 在教学中, 针对特别聪明学生、自主招生等高水平学生, 采用质心参考系的方法比较好.

对以上复杂问题的研讨也需要教师对教学内容有宏观的把握和熟练的运用. 以上研究中物理定律与数学方法的交替使用既避免了解方程等烦琐的工作, 也使得问题的结论更加可靠, 并为一些常规问题的解决提供一些新的思路和方法, 如果能够融会贯通, 将给问题的处理提供极大的便利, 并使对动力学物理过程的理解达到一个更高的高度. 中学物理的一些专题具有很强的综合性和典型性, 包含知识广, 为深入剖析提供了难得的平台. 因此, 本节课不仅要求对“碰撞”结论单纯灌输, 尤其应当将重点放在分析探讨的方法上, 对该课题进行深入“解剖”.

参 考 文 献

[1] 曹则贤. 物理学咬文嚼字之五十一速度[J]. 物理, 2014, (11): 767 – 772.

[2] 乔林. “讨论与思考”的深入与拓展[J]. 中学物理教学参考, 2013, 42(7): 4 – 5.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

The Form and Method of Elastic Collision in the Reference Frame of Center of Mass

Zhang Tingyu[1]　Hu Yangyang[2]

(1. Junior middle school, Beijing Chenjinglun High School, Beijing　100020; 2. College of Education, Capital Normal University, Beijing　100048)

Abstract

The process of elastic collision in the reference system of mass center is studied. The formula of the reference system of mass center is obtained. A new understanding of the "Newton collision law" and the "equation of state" is elaborated. Finally, it sums up the inspiration to the teaching and learning.

Key words: reference system of mass center, elastic collision, Newton collision law.

(上接第 40 页)

Logical Verity and Physical Existence of Complex Numbers

Zhang Lixin

(Nantong Normal College Rugao Campus, Rugao Jiangsu　226500)

Abstract

In the process of solving cubic equations, the original complex in algebra and the logical verity of complex are discussed. The existence verity of complex is discussed based on their relationship with physical motion laws in the nature. The application of complex in physics is divided into two categories: in one category, complex is used as a mathematical transformation for simple calculation, called transformation complex in physics; in the other category, complex appears in the logical starting point of the theoretical system, which is known as the original complex in physics.

Key words: unit of imaginary numbers, complex number field, logical verity, existence verity.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net