DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.06.008

多功能 n 阶蜂巢型电阻网络的等效电阻公式*

谭志中
(南通大学物理系,江苏 南通 226019)

摘 要

研究了一类多功能 n 阶蜂巢型电阻网络模型,这是一个之前一直没有解决的问题. 该网络模型含有 6 个任意电阻参数使得该网络包含了多个不同的网络类型. 解决该问题包括四个步骤: 首先建立一个简化的等效模型,其次应用基尔霍夫定律建立一个非线性差分方程模型,再次采用变换的方法给出非线性差分方程的解,最后创造了一个负电阻元素概念,得到了理想的研究结果. 作为应用文章给出了数个有趣的特殊结论. 本文建立的方法和得到的结论也适用于复阻抗网络的研究.

关键词: 蜂巢型网络,等效变换,非线性差分方程,基尔霍夫定律,负电阻.
中图分类号: O441.1, TN711.3

电阻网络是自然科学与工程技术领域的重要模型,计算两节点间的等效电阻是电路理论和图论等领域的经典问题,这些问题已经经历了 170 多年的研究历史[1]. 自从 1845 年德国物理学家基尔霍夫(1824—1888)创立了节点电流定律和回路电压定律以来,人类就开始通过建立电阻网络模型解决许多抽象和复杂的科学和工程问题[1-16]. 由于电阻网络模型具有具体直观以及便于分析研究等特征,电阻网络模型的构建与研究已成为一系列科学问题研究的基本方法,许多实际问题可以通过构建电阻网络模型进行模拟研究[8-16]. 在自然科学领域与工程技术领域研究电阻网络模型具有重要的理论与实践意义.

电阻网络模型虽然经历了 170 多年的研究历史,并且已经解决了不少类型的电阻网络问题[1-16],然而实际生活中的电阻网络通常比较复杂,寻找复杂网络的精确等效电阻公式是很困难的事情,原因在于需要电路理论知识和数学方法的创新. 我们称图 1 为一类多功能 n 阶蜂巢型电阻网络模型,该模型中有 6 个不同的任意电阻元素,其中右边界为一个任意负载电阻 R_0. 这是一类之前从来没有得到解决的深刻问题. 因为 6 个不同的电阻是任意元素,因而该网络模型包含了大量特殊的电阻网络模型,例如规则的梯形网络[1-5],三角形网络[2],以及一些新型的网络模型等等.

图 1 为一般形式的多功能 n 阶蜂巢型电阻网络模型. 这类网络的结构特点是: 网络单元数为 n,上下边界上的电阻元素均为 r,竖直截面方向的电阻元素为 r_0,网格内部交叉线上的电阻分别为 r_2,r_3,r_4,右端的负载电阻为 R_0. 也就是说该电阻网络中有 6 个不同的任意电阻参数,显然这是一个复杂的电阻网络,多参数网络包含了多种网络功能. 本文拟研究 n 阶网络左端 A_n 和 B_n 两节点间的等效电阻公式,以及任意 A_k 和 B_k 两节点间的等效电阻公式.

1 两个总的等效电阻公式

在图 1 网络中,设 A_k 是上轴线 A_0A_n 之间的第 k 个任意节点(从右端计数),B_k 是下轴线 B_0B_n 之间的第 k 个任意节点,电阻参数如图 1 所示. 我们研究得到了如下 2 个主要结论.

结论 1 图 1 的 n 阶蜂巢型电阻网络中左端 A_n 和 B_n 两节点间的等效电阻公式为

$$R_{A_nB_n}(n) = \lambda - \alpha\beta\left(\frac{F_n + (R_0 - \lambda)F_{n-1}}{F_{n+1} + (R_0 - \lambda)F_n}\right). \quad (1)$$

收稿日期: 2015-12-02
* 南通大学自然科学类科研基金前期预研项目"电阻网络与矩阵变换的理论研究"(No: 15ZY16);南通大学教学改革研究项目"大学物理教学与科研相长模式研究"(No: 2015B01)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

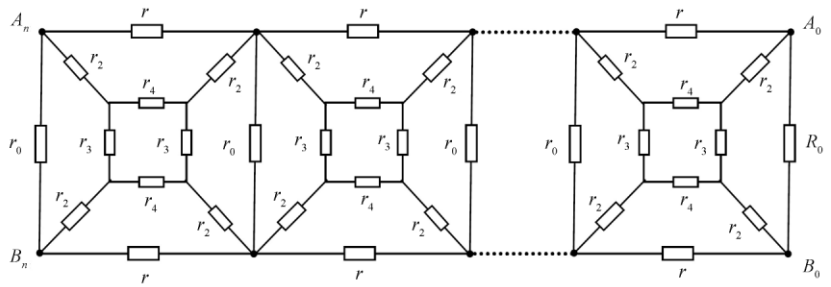


图 1　一个多功能 n 阶蜂巢型电阻网络模型,该网络含有 6 个不同的电阻元素及一个任意的负载电阻 R_0

其中

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad \lambda = \frac{b}{d} r_0, \tag{2}$$

及

$$\alpha = \frac{1}{d}\left(r + br_0 + \sqrt{r^2 + 2dr_0 r} \right),$$
$$\beta = \frac{1}{d}\left(r + br_0 - \sqrt{r^2 + 2dr_0 r} \right). \tag{3}$$

以及

$$b = 1 + \frac{2r}{2r_2 + r_3} + \frac{rr_3^2}{u(2r_2 + r_3)},$$
$$u = 2r_2 r_4 + 2r_2 r_3 + r_3 r_4,$$
$$d = 1 + \frac{2(r_0 + r)}{2r_2 + r_3} + \frac{r_3^2 + 2r_0(r_4 + r_3)}{u(2r_2 + r_3)} r. \tag{4}$$

结论 2　图 1 的 n 阶蜂巢型电阻网络中任意 A_k 和 B_k 两节点间的等效电阻公式为

$$R_{A_k B_k} = \left(\frac{1}{R_{\text{right}}(k)} + \frac{1}{R_{\text{left}}(n-k)} - \frac{1}{r_0} \right)^{-1}, \tag{5}$$

或者写成

$$R_{A_k B_k} = \frac{r_0 R_r(k) R_l(n-k)}{r_0 [R_r(k) + R_l(n-k)] - R_r(k) R_l(n-k)}. \tag{6}$$

其中

$$R_{\text{left}}(n-k) = \lambda - \alpha\beta\left(\frac{F_{n-k} + (r_0 - \lambda) F_{n-k-1}}{F_{n-k+1} + (r_0 - \lambda) F_{n-k}} \right). \tag{7}$$

$$R_{\text{right}}(k) = \lambda - \alpha\beta\left(\frac{F_k + (R_0 - \lambda) F_{k-1}}{F_{k+1} + (R_0 - \lambda) F_k} \right). \tag{8}$$

2　等效模型和递推方程

根据图 1 的结构特征,假设 n 阶网络的左端 A_n 和 B_n 两节点间的等效电阻为 R_n,那么 $n-1$ 阶网络的左端两节点间的等效电阻为 R_{n-1}. 因此我们可以将图 1 简化成为图 2 所示的一个简单模型.

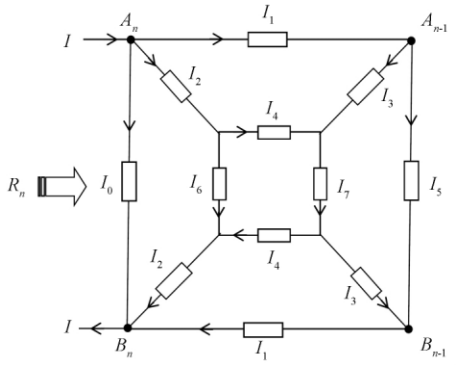


图 2　含有电流参数的二端电路网络等效模型

下面利用基尔霍夫定律建立 R_n 和 R_{n-1} 之间的关系方程. 假设在节点 A_n 输入恒定电流 I 并且让电流从节点 B_n 输出,同时定义其他的分支电流于图 2 中.

在图 2 中利用基尔霍夫定律得到回路电压方程

$$2I_2 r_2 + I_6 r_3 - I_0 r_0 = 0,$$
$$I_1 r + I_3 r_2 - I_4 r_4 - I_2 r_2 = 0,$$
$$2I_3 r_2 + I_7 r_3 - I_5 R_{n-1} = 0,$$
$$2I_4 r_4 + (I_7 - I_6) r_3 = 0. \tag{9}$$

在图 2 中利用基尔霍夫定律得到节点电流方程

$$I_1 + I_2 + I_0 = I, \qquad I_4 + I_6 = I_2,$$
$$I_3 + I_5 = I_1, \qquad I_3 + I_4 = I_7. \tag{10}$$

解以上诸多方程得到一个关键的递推关系

$$\frac{I_0}{I} = \frac{2r + bR_{n-1}}{(2r + r_0 b) + dR_{n-1}}, \tag{11}$$

其中 b 和 d 由 (4) 给出. 因为 $R_n = U/I = I_0 r_0 / I$,所以利用(11) 代入得到

$$R_n = \frac{2rr_0 + br_0 R_{n-1}}{(2r + r_0 b) + dR_{n-1}}. \tag{12}$$

方程(12) 就是所要寻找的一个关键的递推公式,属于非线性差分方程. 下面的工作就是研究方程(12) 的通解和特解.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

3 等效变换及其公式的推导

3.1 公式 1 的推导

这里利用文献[1]建立的变量代换方法去解非线性差分方程(12). 假设存在数列$\{x_n\}$,并且假设下列关系

$$R_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} - \frac{2r + r_0 b}{d}. \tag{13}$$

可以规定初始项$x_0 = 1$,根据(13)得到

$$x_0 = 1, x_1 = R_0 + \frac{2r + r_0 b}{d}. \tag{14}$$

将方程(13)及其递推式R_{n-1}代入(12)化简得到

$$x_{n+1} = 2\left(\frac{r + br_0}{d}\right)x_n - \frac{r_0[b(2r + r_0 b) - 2rd]}{d^2}x_{n-1}. \tag{15}$$

设α和β分别为特征方程x_k的2个根,解方程(15)可以得到(3)的值. 则由(15)得到

$$x_{n+1} = (\alpha + \beta)x_n - \alpha\beta x_{n-1}. \tag{16}$$

根据文献[1,14]中建立的方法解差分方程(16)得到

$$x_n = \frac{1}{\alpha - \beta}[(x_1 - \beta x_0)\alpha^n - (x_1 - \alpha x_0)\beta^n]. \tag{17}$$

将初始项(14)代入(17)得到

$$x_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\left(R_0 + \frac{2r + r_0 b}{d} - \beta\right)\alpha^n - \left(R_0 + \frac{2r + r_0 b}{d} - \alpha\right)\beta^n\right]. \tag{18}$$

为了进一步化简上式,由(15)和(16)得到

$$\alpha + \beta - \frac{2r + r_0 b}{d} = \frac{b}{d}r_0 = \lambda. \tag{19}$$

将等式(19)代入(18)得到

$$x_n = \frac{1}{\alpha - \beta}[(R_0 + \alpha - \lambda)\alpha^n - (R_0 + \beta - \lambda)\beta^n]. \tag{20}$$

将方程(20)及其递推式x_{n+1}代入(13)并且化简得到

$$R_n = \lambda - \alpha\beta\left(\frac{(R_0 + \alpha - \lambda)\alpha^{n-1} - (R_0 + \beta - \lambda)\beta^{n-1}}{(R_0 + \alpha - \lambda)\alpha^n - (R_0 + \beta - \lambda)\beta^n}\right), \tag{21}$$

上式的化简过程中利用了等式(19). 当定义$F_n = (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)$时即可以由公式(21)推导出公式(1). 至此公式(1)得到证明.

3.2 结论 2 的推导

为了研究需要我们创造了一个负电阻元素,也就是说将电阻r_0变换成为三个并联电阻,其中2个r_0和一个负电阻$-r_0$,如图3所示. 根据并联电阻的计算方法得到

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{-r_0} + \frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_0}.$$

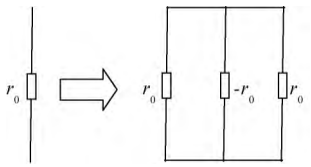


图3 一个电阻等效为三个电阻的并联

显然负电阻$-r_0$的引入是一个非常好的方法,这样的设计不改变整个电路的特性.

当计算任意2节点A_k和B_k之间的等效电阻时,利用图3可以将图1变换成为图4的等效模型.

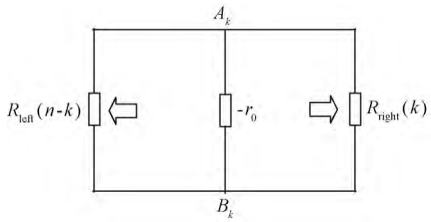


图4 电阻网络的等效变换模型

根据图4的等效模型,从A_k和B_k之间的负电阻分别向左右两边考虑,记向右和向左的等效电阻分别为$R_{\text{right}}(k)$和$R_{\text{left}}(n-k)$,根据并联电阻的计算方法显然得到A_k和B_k二节点间的等效电阻

$$\frac{1}{R_{A_k B_k}} = \frac{1}{R_{\text{right}}(k)} + \frac{1}{R_{\text{left}}(n-k)} - \frac{1}{r_0}, \tag{22}$$

其中等效电阻$R_{\text{right}}(k)$和$R_{\text{left}}(n-k)$可以根据公式(1)直接给出,进而得到公式(7)和(8). 至此公式(5)获得了证明. 再次从公式(5)经过简单计算可以立刻得到公式(6).

显然负电阻元素的建立是一个理论上的创新,破解了一个等效电阻难题. 实际上,我们可以简单地验证公式(5)的正确性. 例如,当$k = n$时,从(7)得到$R_{\text{left}} = r_0$,因此,从(5)得到$R_{A_n B_n} = R_{\text{right}}(n)$,这就表明公式(5)包含了公式(1).

4 特殊情形和比较

情形1 在图1的网络中,当$r_3 = r_4$时,根据

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(4) 得到

$$b = 1 + \frac{2r}{2r_2 + r_3} + \frac{rr_3}{(4r_2 + r_3)(2r_2 + r_3)},$$
$$d = 1 + \frac{(r_3 + 4r_0)r}{(4r_2 + r_3)(2r_2 + r_3)} + \frac{2(r_0 + r)}{2r_2 + r_3}. \tag{23}$$

此情形下的等效电阻公式仍然由公式(1)和(5)表达,只是此时的参数退化成为(23)

情形 2　在图 1 的网络中,当 $r_4 = r_3 = r_2 = r$ 时,根据(4)得到

$$b = \frac{26}{15}, \qquad d = \frac{26r + 14r_0}{15r}. \tag{24}$$

代入(3)得到

$$\alpha = \frac{15r}{26r + 14r_0}\left(r + \frac{26}{15}r_0 + \sqrt{r^2 + \frac{4r_0}{15}(13r + 7r_0)}\right),$$
$$\beta = \frac{15r}{26r + 14r_0}\left(r + \frac{26}{15}r_0 - \sqrt{r^2 + \frac{4r_0}{15}(13r + 7r_0)}\right) \tag{25}$$

及

$$\lambda = \frac{b}{d}r_0 = \frac{13r_0r}{13r + 7r_0}.$$

因此将以上参数代入(1)得到

$$R_{A_nB_n} = \frac{13r_0r}{13r + 7r_0} - \left(\frac{8rr_0}{13r + 7r_0}\right)^2\left(\frac{F_n + (R_0 - \lambda)F_{n-1}}{F_{n+1} + (R_0 - \lambda)F_n}\right). \tag{26}$$

情形 3　当 $r_4 = 0$ 时,n 阶蜂巢型电阻网络图 1 退化成为一个含有竖直电阻桥的 n 阶电阻网络,如图 5 所示. 根据(4)得到

$$b = 1 + \frac{2r}{2r_2 + r_3} + \frac{rr_3}{2r_2(2r_2 + r_3)},$$
$$d = 1 + \frac{2(r_0 + r)}{2r_2 + r_3} + \frac{(r_3 + 2r_0)r}{2r_2(2r_2 + r_3)}. \tag{27}$$

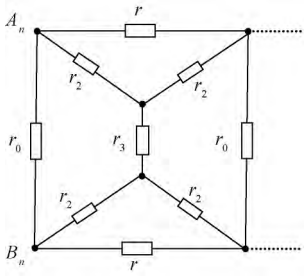


图 5　含有竖直电阻桥的子电阻网络模型

此情形下的等效电阻公式仍然由公式(1)和(5)表达,只是此时的参数退化成为(27).

情形 4　当 $r_3 = 0$ 时,n 阶蜂巢型电阻网络图 1 退化成为一个含有水平电阻桥的 n 阶电阻网络,如图 6 所示. 根据(4)得到

$$b = 1 + \frac{r}{r_2}, \quad d = 1 + \frac{r_0 + r}{r_2} + \frac{r_0r}{2r_2^2}. \tag{28}$$

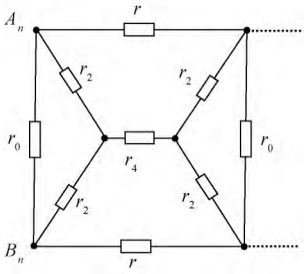


图 6　含有水平电阻桥的子电阻网络模型

代入(3)得到

$$\alpha = \frac{1}{d}\left(r + r_0 + \frac{r_0r}{r_2} + \sqrt{r^2 + 2dr_0r}\right),$$
$$\beta = \frac{1}{d}\left(r + r_0 + \frac{r_0r}{r_2} - \sqrt{r^2 + 2dr_0r}\right) \tag{29}$$

及

$$\lambda = \frac{2(r_2 + r)r_2r_0}{2r_2^2 + 2(r_0 + r)r_2 + r_0r}. \tag{30}$$

因此代入(1)得到

$$R_{A_nB_n} = \lambda - \left(\frac{r_0}{d}\right)^2\left(\frac{F_n + (R_0 - \lambda)F_{n-1}}{F_{n+1} + (R_0 - \lambda)F_n}\right). \tag{31}$$

其中 F_n 定义于方程(2),并且 λ 由(30)给出.

情形 5　当 $r_4 = r_3 = 0$ 时,n 阶蜂巢型电阻网络图 1 退化成为一个内嵌交叉电阻的电阻网络,如图 7 所示. 根据(4)得到

$$b = 1 + \frac{r}{r_2}, \qquad d = 1 + \frac{r_0 + r}{r_2} + \frac{r_0r}{2r_2^2}. \tag{32}$$

不难发现(32)与(28)的表达式完全相同,因此他们的等效电阻也完全相同,也由公式(31)给出. 这是为什么呢? 这是因为当 $r_3 = 0$ 时,电路的对称结构导致 r_4 中无电流通过,即电阻 r_4 上无电压,故可以视为短路. 这同时验证了本文所得到的一般结论是正确的.

情形 6　当 $r_2 = 0$ 时,n 阶蜂巢型电阻网络图 1 退化成为一类 2 个矩形并联的 n 阶矩形电阻网络,如图 8 所示. 根据(4)得到

$$b = 1 + \frac{2r}{r_3} + \frac{r}{r_4},$$
$$d = 1 + \frac{2(r_0 + r)}{r_3} + \frac{r_3^2 + 2r_0(r_4 + r_3)}{r_3^2r_4}r. \tag{33}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

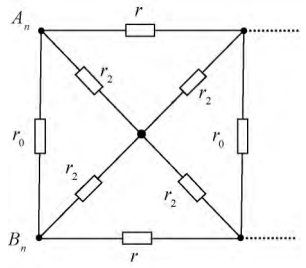


图 7　内含交叉电阻的子电阻网络模型

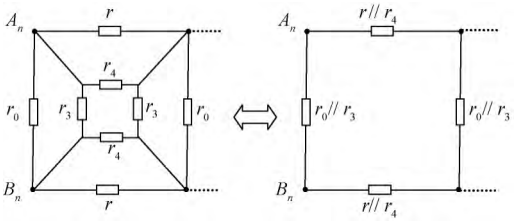


图 8　双矩形网络等效为单矩形电阻网络

此情形下的等效电阻公式仍然由公式(1)和(5)表达,只是此时的参数退化成为(33).

情形 7　当 $r_4 = r_3 = \infty$ 或者 $r_2 = \infty$ 时,n 阶蜂巢型电阻网络图 1 退化成为一个简单的 n 阶矩形网络模型,如图 9 所示.

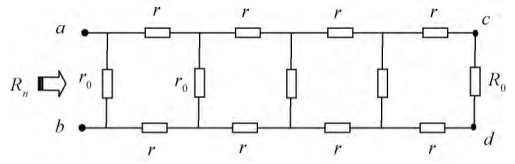


图 9　一个简单的 n 阶矩形电阻网络模型

在(4)中取极限 $r_2 \to \infty$ 得到

$$b = 1, \qquad d = 1, \tag{34}$$

$$\lambda = \frac{b}{d} r_0 = r_0 \tag{35}$$

及

$$\alpha = r_0 + r + \sqrt{r(2r_0 + r)},$$

$$\beta = r_0 + r - \sqrt{r(2r_0 + r)}. \tag{36}$$

因此代入(1)得到

$$R_n = r_0 - r_0^2 \left(\frac{F_n + (R_0 - r_0) F_{n-1}}{F_{n+1} + (R_0 - r_0) F_n} \right). \tag{37}$$

图 9 的网络模型已经被不少文献研究过,如文献[1,2,4,7]的研究,比较(37)与文献[1]中的结果可以发现 2 种结论完全相同. 这也就间接地验证了本文结论的正确性.

情形 8　当 $n \to \infty$ 时,根据(3)得到 $0 < \beta/\alpha < 1$,因此

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{r + br_0 - \sqrt{r^2 + 4adr_0}}{r + br_0 + \sqrt{r^2 + 4adr_0}} \right)^n = 0, \tag{38}$$

因此,根据(1)得到

$$R_{A_nB_n}(\infty) = \lambda - \beta. \tag{39}$$

将(3)代入(39)得到

$$R_{A_nB_n}(\infty) = \frac{1}{d} \left(\sqrt{r^2 + 2dr_0 r} - r \right). \tag{40}$$

结论(40)表明公式(1)在 $n \to \infty$ 情形下的结果是一个有限常数.

情形 9　当 $R_0 = \lambda - \beta$ 时,根据(21)立刻得到

$$R_{A_nB_n}(n) = \lambda - \beta. \tag{41}$$

注意公式(41)与公式(39)相同,但是他们的来源不同. 公式(41)是电阻网络的特征电阻,该特征电阻值与极限电阻值完全相同. 显然,当负载电阻 $R_0 = \lambda - \beta$ 为特征电阻值时,等效电阻是一个有限常数,并且等于极限情形时的电阻值,这是一个有趣的发现.

情形 10　本文建立的方法和得到的结论也适用于复阻抗网络的研究,只要我们采用变量代换方法即可以根据等效电阻公式推导出复阻抗网络的等效复阻抗公式. 如假设电阻元素 $r_k(k = 0,1,2,3,4)$ 是由电阻、电感和电容构成,如图 10 所示. 则通过变换关系得到复阻抗

$$z_k = r_k = \mathrm{i}\omega L_k + \frac{R_k}{1 + \mathrm{i}\omega C_k R_k}. \tag{42}$$

如果我们将(42)代入公式(1),那么就可以立刻得到等效复阻抗公式. 当然,由于复阻抗的表达结构比较复杂并且需要讨论特征方程根的复数情形,此处不再给出具体公式.

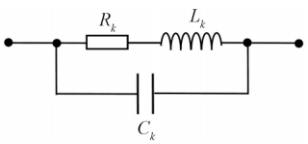


图 10　元素 r_k 所表达的等效复阻抗

5　小结与评论

具有多个不同参数的复杂电阻网络是一个科学难题. 本文采用多个不同的变换方法解决了一个多功能 n 阶蜂巢型电阻网络的等效电阻问题. 该问题的研究包括四个步骤: 首先我们将原模型图 1 等效

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

成为一个简单模型图 2; 其次利用基尔霍夫定律依据网络模型建立节点电流方程和回路电压方程,消去一些电流参数进而得到一个关于电阻的非线性差分方程模型; 再次我们通过构建变换方法获得了非线性差分方程的解,从而获得了左端节点的等效电阻公式; 最后创造了一个负电阻元素,通过建立等效模型图 3 而得到了任意 A_k 和 B_k 两节点间的等效电阻公式. 由于研究的网络模型中有 6 个不同的任意电阻元素,因此依据总的等效电阻公式推导出了一系列特殊的等效电阻结论. 作为应用,对结论中的电阻元素分别取不同的值而得到一系列有趣的等效电阻公式. 通过特殊结论与其他文献结论的比较研究而间接地证明了本文结论的正确性. 当然,由于本文的理论推导是严密和精确的并且是自洽的,因而得到的结论必然是正确的. 特别地,根据(42)的变量代换可知本文的研究方法与结论也适用于复阻抗网络的研究.

需要强调的是目前的现实世界中还没有真正的"负电阻",但是不排除将来发现的暗物质中存在"负电阻". 当然"负电阻"可能相似与"数学中的虚数"看上去没有用其实能够帮助人们解决许多复杂的问题. 本文的研究获得了 2 个总的等效电阻公式,为未来科学研究建立了新的理论工具. 本文的研究思想与方法对于开展大学物理教学与科研协同相长教学具有很好的理论与实践意义,将为广大物理教师提供有益的实践案例与指导.

参 考 文 献

[1] 谭志中. 电阻网络模型[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社,2011: 3 – 230.

[2] 陆建隆,谭志中. 关于梯形网络等效电阻的普适研究[J]. 大学物理,2001,20(10): 26 – 28.

[3] 李建新,刘栓江. n 级梯形电阻网络的研究[J]. 大学物理,2003,22(7): 20 – 21.

[4] 谭志中,赵素英. N 阶电阻网络等效电阻的研究[J]. 河北师范大学学报(自然科学版),2004,28(2): 149 – 154.

[5] 谭志中,陆建隆. 二端梯形网络等效复阻抗的普适研究[J]. 大学物理,2009,28(7): 29 – 33.

[6] 谭志中,杨建华. 一类含有复杂电阻的 n 阶三角形网络的等效电阻公式[J]. 大学物理,2015,34(6): 24 – 35.

[7] 汤华,谭志中. n 阶网络任意节点的等效电阻的研究[J]. 大学物理,2012,31(11): 18 – 22.

[8] 谭志中,陆建隆. 多边形电阻网络等效电阻的统一建构[J]. 河北师范大学学报(自然科学版),2011,35(2): 140 – 144.

[9] 谭志中. 加强型多边形电阻或电容网络的等效值研究[J]. 大学物理,2011,30(12): 29 – 32.

[10] 谭震,谭志中. 构建等效模型研究三维网络的等效电阻及复阻抗[J]. 大学物理,2014,33(5): 53 – 59.

[11] 汤华. 无穷球面网络任意两节点间的等效电阻公式[J]. 大学物理,2015,34(9): 15 – 18.

[12] Cserti J. Application of the lattice Green's function for calculating the resistance of an infinite network of resistors[J]. Am J Phys,2000,68(10): 896 – 906.

[13] Wu F Y. Theory of resistor networks: the two-point resistance[J]. J Phys A: Math Gen,2004,37(26): 6653 – 6673.

[14] Tan Z Z,Essam J W,Wu F Y. Two-point resistance of a resistor network embedded on a globe[J]. Phys Rev E,2014,90: 012130.

[15] Essam J W,Tan Z Z,Wu F Y. Resistance between two nodes in general position on an $m \times n$ fan network[J]. Phys Rev E,2014,90: 032130.

[16] Izmailian N Sh,Kenna R,Wu F Y. The two-point resistance of a resistor network: a new formulation and application to the cobweb network[J]. J Phys A: Math Theor,2014,47(3): 035003.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Resistance Formulae of a Multipurpose *n*-step Honeycomb Network of Resistors

Tan Zhizhong

(Department of Physics, Nantong University, Nantong Jiangsu 226019)

Abstract

We consider a multipurpose *n*-step honeycomb network which is a profound problem, it has not been resolved before. The network contains a number of different types of resistor network model. This problem is resolved by four steps. First of all, we simplify a complex graphics into a simple equivalent model, then using Kirchhoff's laws to analyse the network and establishing a nonlinear difference equation model. Third, we construct the method of equivalent transformation to obtain the general solution of the nonlinear difference equation. Finally, we creat a new concept of negative resistance for the needs of the equivalent conversion. In this paper, we obtain two general resistance formulae of a multipurpose honeycomb network of resistors. As applications, several interesting specific results are produced. Our method and the results are suitable for the research of complex impedance network as well.

Key words: honeycomb network, equivalent transformation, nonlinear difference equation, Kirchhoff's laws, negative resistance.

(上接第 43 页)

The Analysis and Calculation of Rabi Model

Zhang Pan Hu Jie

(Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract

The Rabi model is one of the basic models of quantum optics, which describes the interaction between a two-level atom and a cavity field. Although the Rabi model is important in physics, it cannot be solved analytically. The Rabi model usually is transformed into JC model under the rotating wave approximation for analytical analysis. The JC model only can describe the quantum dynamics of optical-cavity electrodynamics with strong coupling. However, it cannot describe solid-state quantum electrodynamics with ultrastrong coupling. In this work, in order to solve this problem, we transform the Rabi Hamiltonian under a unitary transformation with $U = \exp[\lambda\sigma_x(a^+ - a)]$ and neglect a^+ and a higher order terms. Mapping onto the eigenstates of σ_z with $\sigma_z|\pm z\rangle = \pm|\pm z\rangle$, we get the JC-like model. We analyze the obtained Hamiltonian, then we can get the energy spectrum and wave functions. This method was introduced in Phy. Rev. A, 2012, 86(1): 2271. We do numerical simulation in MATLAB, and compare with the analytical results, We find that the two physical images in the low level region are in good agreement.

Key words: Rabi model, unitary transformation, ultrastrong coupling.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net