DOI:10.19789/j.1004-9398.2018.02.001

第 39 卷 第 2 期
2018 年 4 月
首都师范大学学报(自然科学版)
Journal of Capital Normal University
(Natural Science Edition)
No. 2
April, 2018

两条水平射线的光滑连接*

石冶郝[1] 伍和用[2]

(1. 首都师范大学初等教育学院,北京 100048;2. 湖南省新邵县寸石镇大富学校 湖南 新邵 422907)

摘 要

本文讨论了两条水平射线的光滑连接,用 $C^\infty(\mathrm{R})$ 函数实现连接问题.

关键词: 射线,光滑连接,平坦函数,$C^\infty(\mathrm{R})$ 函数.

中图分类号: O174

0 引 言

函数是高等数学的研究对象,依据函数的不同性质,将函数分成各种各样的空间,如连续函数空间、哈代空间、有界平均震荡函数空间等. 在 [1] 中介绍了一个分段函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$,它在 R 上可导任意多次. 用数学归纳法证明了高阶导数 $f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{2n}(1/x)e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$,此处 $P_{2n}(1/x)$ 是 $1/x$ 的 $2n$ 次多项式,易得 $f^{(n)}(0) = 0$ 从而 $f(x) \in C^\infty(\mathrm{R})$.

文 [2] 用五种不同的方法得出函数 $e^{1/x}$ 的高阶导数公式:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{1/x}) = (-1)^n e^{1/x} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \cdot (n-k)!x^{-n-k}. \tag{*}$$

利用上述公式,结合 $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{e^{-1/x}}{x^{n+k}} = \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{t^{n+k}}{e^t} = 0$,可以直接计算得出 $f^{(n)}(0) = 0$.

从函数 $f(x)$ 出发,可以构造无穷可微函数 $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}$,使之满足

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1, \forall x \in \mathrm{R};$$
$$\varphi(x) = 1, x \geqslant 1; \varphi(x) = 0, x \leqslant 0.$$

通过坐标变换,得到函数 $\psi(x) = \varphi\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ 满足

$$0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1, \forall x \in \mathrm{R};$$
$$\psi(x) = 1, x \geqslant b; \psi(x) = 0, x \leqslant a.$$

例如

$$\phi(x) = f(1-x^2) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

在 R 上可导任意多次,而且它的图象中段隆起,两侧水平展开,将这样的函数称为钟形函数或隆起函数(bump function).

在一些实际应用中,如果需要光滑连接两条水平射线,这里光滑意指无穷次求导. 由泛函分析的知识,这样的函数是存在的(见 [3,定理 1.1.5]),而且由卷积的形式给出. 本文从函数 $e^{1/x}$ 出发,构造一个分段函数属于 $C^\infty(\mathrm{R})$,实现两条水平射线的光滑连接.

1 主要结论

定理 设 $a < b$,函数

$$F(x) = \begin{cases} c_2, & x \geqslant b \\ (c_2 - c_1)\left(1 - \exp\left(\dfrac{b-a}{x-b}\right)\right) \cdot \exp\left(-\dfrac{(b-a)\exp\left(\dfrac{b-a}{x-b}\right)}{x-a}\right) + c_1, & a < x < b \\ c_1, & x \leqslant a \end{cases},$$

收稿日期:2017-05-04

* 国家自然科学基金(11601352)资助项目;人才培养质量教改立项项目-MOOC 环境下的数学分析课程教学改革项目.

这里 c_1,c_2 为常数,$\exp(x)=\mathrm{e}^x$,则 $F(x)\in C^\infty(\mathrm{R})$.

证明 设函数

$$G(x)=\begin{cases} c_2, & x\geqslant 0 \\ (c_2-c_1)(1-\mathrm{e}^{1/x})\cdot \\ \exp\left(-\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x+1}\right)+c_1, & -1<x<0 \\ c_1, & x\leqslant -1 \end{cases},\text{则}$$

函数 $F(x)=G\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)$. 不妨设 $c_2=1$,$c_1=0$,此时函数 $G(x)$ 退化为

$$H(x)=\begin{cases} 1, & x\geqslant 0 \\ (1-\mathrm{e}^{1/x})\exp\left(-\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x+1}\right), & -1<x<0. \\ 0, & x\leqslant -1 \end{cases}$$

现在只须证明函数 $H(x)\in C^\infty(\mathrm{R})$. 显然函数 $H(x)$ 在 $x\neq 0$,$x\neq -1$ 处可以无穷次求导,只须考察它在 $x=0$,$x=-1$ 处的可导性.

接下来我们证明函数 $H(x)$ 的高阶导数 $H^{(n)}(x)$ 满足

$$\lim_{x\to -1+0}H^{(n)}(x)=\lim_{x\to 0-0}H^{(n)}(x)=0.$$

记 $h(x)=\exp\left(-\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x+1}\right)$,对 $h(x)$ 求导得

$$h'(x)=h(x)\mathrm{e}^{1/x}[(x+1)^{-2}+(x+1)^{-1}x^{-2}],$$

继续求导,由乘积函数的高阶求导法则与引言中的(*)式,计算得 $h^{(r)}(x)$ 为形如

$$[\mathrm{e}^{1/x}]^i\left[\exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x+1}\right)\right]^j\frac{c(x)}{(x+1)^k}$$

的函数之和,其中 $c(x)$ 是 $1/x$ 的多项式,在 $x=-1$ 连续,i,j,k 为正整数.

当 $-1<x<0$ 时,注意到

$$H^{(n)}(x)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(1-\mathrm{e}^{1/x})^{(n-r)}h^{(r)}(x),$$

因此 $H^{(n)}(x)$ 为形如

$$[\mathrm{e}^{1/x}]^{i_1}\left[\exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x+1}\right)\right]^{j_1}\left[\frac{c_1(x)}{(x+1)^{k_1}}+\frac{c_2(x)}{x^{k_2}}\right]$$

的函数之和,其中 $c_1(x)$ 是 $1/x$ 的多项式,在 $x=-1$ 连续,$c_2(x)$ 是 $1/(x+1)$ 的多项式,在 $x=0$ 连续,i_1,j_1,k_1,k_2 为正整数. 而对任意的正整数 k,根据洛比达法则,有

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{\left[\exp\left(-\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x+1}\right)\right]^{j_1}}{(x+1)^k}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^k}{[\exp(t\mathrm{e}^{(1-t)/t})]^{j_1}}=0,$$

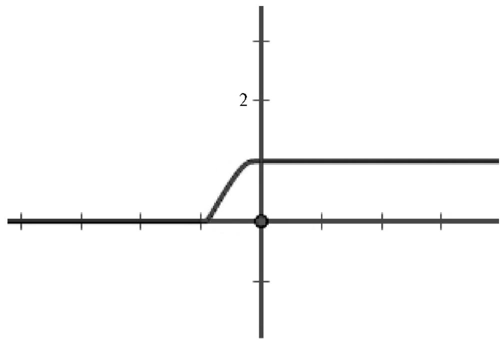
$$\lim_{x\to 0-0}\frac{[\mathrm{e}^{1/x}]^{j_2}}{x^k}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(-1)^k t^k}{\mathrm{e}^{j_2 t}}=0,$$

于是,

$$\lim_{x\to -1+0}H^{(n)}(x)=0,\ \lim_{x\to 0-0}H^{(n)}(x)=0.$$

易得,$\lim\limits_{x\to a+0}F^{(n)}(x)=0$,$\lim\limits_{x\to b-0}F^{(n)}(x)=0$,从而 $F(x)\in C^\infty(\mathrm{R})$.

函数 $H(x)$ 的图象如下:



2 说 明

上面讨论的这些分段函数在 R 上无穷次可导,在分段点的高阶导数值都是 0,在实分析中,称这种函数在此点是平坦的(flat function). 在文献 [4] 中,给出了泰勒级数的一个反例. 函数 $g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 是无穷可微的,并且它的所有各阶导数在 $x=0$ 处都等于零,所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}0$ 在实轴上收敛,且和函数恒等于零. 因此,$g(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数在 $x=0$ 的任何空心邻域内不等于 $g(x)$. 于是复函数 $g(z)=\mathrm{e}^{-1/z^2}$ 在 $z=0$ 是不解析的,显然函数光滑和解析是不同的概念.

同理函数 $H(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}0$$

在实轴上收敛,且和函数恒等于零,它不等于 $H(x)$. 因此研究某个函数的泰勒级数时,必须讨论这个级数的余项.

参 考 文 献

[1] 张筑生. 数学分析新讲(第二册) [M]. 北京:北京大学出版社,1990:12.
[2] Daboul S, Mangaldan J, Spivey M Z, et al. The Lah Numbers and the nth Derivative of exp(1/x) [J]. Math Magazine, 2013, 86 (1):39-47.
[3] 丁勇. 现代分析基础 [M]. 北京:北京师范大学出版社,2008:3.
[4] 汪林. 实分析中的反例 [M]. 北京:高等教育出版社,1989:163.

On Smooth Connection Between Two Horizontal Rays

Shi Yehao[1]　Wu Heyong[2]

(1. Elementary Educational College, Capital Normal University, Beijing　100048;
2. Dafu School, Xinshao Hunan　422907)

Abstract

The purpose of the paper is to study smooth connection of two horizontal rays. A $C^\infty(\mathrm{R})$ function is given to solve the connection.

Key words: rays, smooth connection, flat function, $C^\infty(\mathrm{R})$ function.